



SIGNAL-IMAGE-COMMUNICATIONS
FRE 2731 CNRS

PYRAMIDES DE CARTES GÉNÉRALISÉES, CHEMINS DE CONNECTION ET ORBITES GÉNÉRALISÉES

C. GRASSET-SIMON, G. DAMIAND, P. LIENHARDT

RAPPORT DE RECHERCHE

n° 2005-02

Mai 2005

SIC, Université de Poitiers, France

SIC, UFR SFA, Université de Poitiers,
Bât. SP2MI, Téléport 2, Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 FUTUROSCOPE
CHASSENEUIL Cedex, FRANCE
Tél : (+33)(0)5 49 49 65 99
Fax : (+33)(0)5 49 49 65 70

Table des matières

1	Introduction	4
2	Rappels : n-G-cartes et suppression/contraction de cellules	5
3	Définition des pyramides de n-G-cartes	6
4	Chemins de connection	9
4.1	Chemins de connection	9
4.1.1	Définitions	10
4.1.2	Propriétés	24
4.2	Chemins de connection étendus	39
4.2.1	Définitions	39
4.2.2	Propriétés	47
5	Orbites généralisées	55
5.1	Définitions	55
5.2	Propriétés	58
5.3	Variante possible	76
6	Conclusion	79

1 Introduction

En analyse d'image il peut être utile pour certaines applications de segmenter une image à différents niveaux. Selon, l'application, certaines informations peuvent être plus claires et donc plus facilement exploitables à certains niveaux. Une pyramide d'images correspond à différents niveaux de segmentation d'une même image ; le niveau 0 correspond à l'image initiale, et les niveaux suivants correspondent aux segmentations successives de l'image. Parmi les pyramides d'images on discerne les pyramides d'images régulières (cf. [1]) et les pyramides d'images irrégulières (cf. [2, 3, 4]).

La plus part des algorithmes travaillant sur des images ont besoin d'extraire des informations, telles que l'adjacence des régions d'une image (e.g. algorithme de segmentation par agrégation de régions), l'ordre,... Par exemple, il peut être utile de retrouver l'ordre des arêtes qui composent le bord d'une région 2D, ou en 3D de connaître l'ordre des volumes, des faces autour d'une arête ou d'un sommet.

Beaucoup de pyramides irrégulières sont définies à base de graphes [3, 5]. Plus récemment, Brun et Kropatsch [6, 7, 8, 9] ont étudié les pyramides de cartes combinatoires 2D ; les cartes combinatoires permettant de représenter l'information topologique de subdivisions de surfaces orientables sans bords (par exemple l'information d'ordre qui n'est généralement pas représentée par les graphes).

Les images 3D et 4D (le temps étant la 4^{ème} dimension) sont maintenant des images usuelles. Aussi, nous voulons étendre les travaux précédents à toute dimension, en définissant les pyramides de cartes généralisées. Les cartes généralisées de dimension n (ou n -G-cartes) représentent la topologie des quasi-variétés de dimension n [10], orientables ou non, avec ou sans bord. Nous avons choisi les cartes généralisées du fait de leur définition qui est homogène pour toute dimension. Aussi, nous pouvons aisément définir des opérations génériques et des algorithmes.

Une pyramide de n -G-cartes peut être construite de la manière suivante. Étant donnée une n -G-carte représentant par exemple une image, chaque niveau de la pyramide est déduit du précédent niveau en appliquant simultanément suppressions et/ou contractions de cellules de dimension quelconque¹.

Il est essentiel pour beaucoup d'applications, d'établir la correspondance entre une cellule d'un niveau donné, et l'ensemble des cellules des niveaux précédents dont la contraction ou la suppression a entraîné la création de cette cellule. Par exemple en 2D, il peut être utile d'associer une face avec la région qui lui correspond à un niveau inférieur. En particulier, cela permet de retrouver toute information contenue à un niveau inférieur de la pyramide. La notion de champs récepteur ("receptive field" en anglais) a été introduite afin d'établir cette correspondance entre les régions de différents niveaux. Tout d'abord, Cette notion a été définie dans le contexte de hiérarchie de graphes [3], de la manière suivante : le champs récepteur d'une cellule d'un niveau a est l'ensemble de tous les pixels du niveau 0 qui "composent" cette cellule. Plus récemment, Brun et Kropatsch ont défini la notion de champs récepteur d'un brin pour une pyramide de cartes combinatoires 2D [11]. Cette notion est basée sur la notion de connecting walk entre un brin survivant et son successeur à un niveau donné, cette dernière étant l'ensemble des brins qui séparent ces deux brins au niveau précédent. La notion de fenêtre de réduction généralise cette notion de connecting walk à tout niveau.

L'objectif principal de ce rapport est de définir la notion d'orbite généralisée dans le cadre des pyramides de n -G-cartes. Cette notion permet d'associer toute cellule de dimension quelconque d'un niveau donné avec l'ensemble des cellules qui lui correspondent à un niveau inférieur. Cette définition est basée sur une généralisation de la notion de connecting walk, qui est lui même basé sur l'opération de suppressions et contractions de cellules de dimension quelconque présentée dans [12].

La notion d'orbite est une notion classique pour les cartes combinatoires et généralisées. Elle permet de définir une cellule comme étant un ensemble de brins, un brin étant l'unique élé-

¹Remarquons que les pyramides de cartes combinatoires 2D définies par Brun et Kropatsch sont construites d'une manière particulière : chaque niveau impair (resp. pair) est déduit du précédent niveau en contractant (resp. supprimant) des arêtes.

ment composant les cartes (cf. section 2). Étant donnée une orbite (e.g. une cellule de dimension quelconque) d'un certain niveau d'une pyramide, une orbite généralisée est l'union d'orbites correspondante à un niveau inférieur. Cette notion généralise celle de champs récepteur pour toute orbite (i.e. toute cellule) et tout niveau.

Ce rapport est organisé de la manière suivante. Nous donnons en section 2 quelques brefs rappels concernant les cartes généralisées de dimension n , et l'opération de suppressions et contractions de cellules de dimension quelconque. La notion de pyramide de n -G-cartes est définie en section 3. Dans le but de définir la notion d'orbite généralisée, nous abordons section 4.1, la notion de chemin de connection puis de chemin de connection étendu. Dans cette section nous en donnons deux définitions ce qui nous permet de déduire deux algorithmes de construction de chemin de connection (l'un récursif et l'autre itératif en s'appuyant directement sur les définitions), et nous donnons quelques propriétés de ces chemins et des ensembles de brins qu'ils forment. Puis, section 5, nous définissons la notion d'orbite généralisée, nous abordons également quelques propriétés les concernant ainsi qu'une variante possible. Enfin, nous concluons et donnons quelques perspectives en section 6.

2 Rappels : n -G-cartes et suppression/contraction de cellules

Les cartes généralisées de dimension n (ou n -G-cartes) représentent la topologie d'objets subdivisés de dimension n , et plus précisément la topologie de quasi-variétés (voir [13, 14, 10]). Une n -G-carte est composé d'un ensemble d'éléments abstraits (les brins), ainsi que des applications définies sur ces brins.

Définition 1 (carte généralisée) : Soit $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$. Une n -carte généralisée, ou n -G-carte, est une algèbre $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ où :

1. B est un ensemble fini de brins ;
2. $\forall 0 \leq i \leq n$, α_i est une involution² sur B ;
3. $\forall 0 \leq i \leq n-2$, $\forall i+2 \leq j \leq n$, $\alpha_i \circ \alpha_j$ est une involution.

Les cellules sont implicitement représentées comme des ensembles de brins. (voir [10] pour plus de détails).

Définition 2 (i -cellule) : Soit G une n -G-carte, b un brin de cette G -carte, et $i \in N = \{0, \dots, n\}$. La i -cellule incidente à b est l'orbite³ :

$$\langle \rangle_{N-\{i\}}(b) = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \rangle(b).$$

La figure 1 illustre les notions de carte généralisée et de i -cellule. Intuitivement, une i -cellule est l'ensemble de tous les brins qui peuvent être atteints à partir de b , en utilisant une combinaison quelconque des involutions exceptées α_i . L'ensemble des i -cellules est une partition de l'ensemble des brins B , pour chaque i entre 0 et n . Deux cellules sont disjointes quand leur intersection est vide, i.e. quand aucun brin n'est partagé par les cellules. Plus de précisions concernant les n -G-cartes sont exposées dans [10].

Dans le but de définir les pyramides de n -G-cartes, Damiani et Lienhardt ont défini "l'opération de contractions suppressions simultanées de cellules de dimension quelconque" (voir [12]). Cette

²Une involution f sur un ensemble fini S est une bijection de S sur S telle que $f = f^{-1}$.

³Soit $\{\Pi_0, \dots, \Pi_n\}$ un ensemble de permutations de B . L'orbite d'un élément b relativement à cet ensemble de permutations est $\langle \Pi_0, \dots, \Pi_n \rangle(b) = \{\Phi(b), \Phi \in \langle \Pi_0, \dots, \Pi_n \rangle\}$, où $\langle \Pi_0, \dots, \Pi_n \rangle$ dénote le groupe des permutations générées par $\Pi_0, \dots, \Pi_n$.

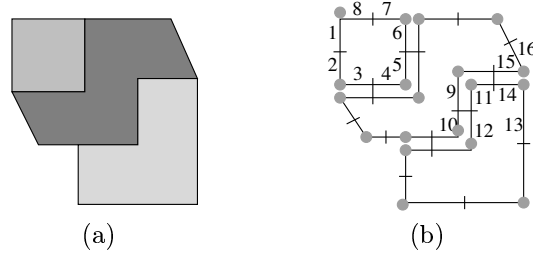


FIG. 1 – (a) Une subdivision d’une surface. (b) La 2-G-carte correspondante. Les brins sont représentés par des segments noirs (numérotés pour certains). Deux brins en relation par α_0 partagent un petit segment vertical (ex. les brins 1 et 2). Deux brins en relation par α_1 partagent un même point (ex. les brins 2 et 3). Deux brins distincts en relation par α_2 sont parallèles et proches l’un de l’autre (ex. les brins 9 et 11); sinon, le brin est sa propre image par α_2 (ex. le brin 2). Le sommet incident au brin 14 est $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle (14) = \{13, 14, 15, 16\}$, L’arête incidente au brin 9 est $\langle \alpha_0, \alpha_2 \rangle (9) = \{9, 10, 11, 12\}$, et la face incidente au brin 4 est $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle (4) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

opération permet de contracter et supprimer un ensemble de cellules de dimension quelconque de manière simultanée. La définition formelle de cette opération est la suivante :

Définition 3 (suppressions et contractions simultanées de cellules) : Soit $G=(B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ une n -G-carte, S_i les ensembles de i -cellules à supprimer pour $0 \leq i \leq n-1$, et C_i les ensembles de i -cellules à contracter pour $1 \leq i \leq n$.

Soit $S = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_i$ et $C = \bigcup_{i=1}^n C_i$.

Les deux pré-conditions suivantes doivent être satisfaites : les cellules doivent être disjointes (i.e. $\forall c, c' \in C \cup S, c \cap c' = \emptyset$) et le “degré” de chaque cellule doit être égal à deux, i.e. :

- $\forall i, 0 \leq i \leq n-2, \forall b \in S_i, b\alpha_{i+1}\alpha_{i+2} = b\alpha_{i+2}\alpha_{i+1}$
- $\forall i, 2 \leq i \leq n, \forall b \in C_i, b\alpha_{i-1}\alpha_{i-2} = b\alpha_{i-2}\alpha_{i-1}$

Soit $BS_i = (S_i \cup C_i)\alpha_i - (S_i \cup C_i), \forall i, 0 \leq i \leq n$.

La n -G-carte résultante des suppressions et contractions simultanées de cellules de dimension quelconque est $G'=(B', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$ définie par :

1. $B' = B - (C \cup S)$
 2. $\forall i, 0 \leq i \leq n, \forall b \in B' - BS_i, b\alpha'_i = b\alpha_i$
 3. $\forall i, 0 \leq i \leq n, \forall b \in BS_i, b\alpha'_i = b' = b(\alpha_i\alpha_{l_1}) \dots (\alpha_i\alpha_{l_r})\alpha_i$, où
 r est le plus petit entier tel que $b' \in BS_i$,
et $\forall j, 1 \leq j \leq r, l_j = \begin{cases} i+1 & \text{si } b_j = b(\alpha_i\alpha_{l_1}) \dots (\alpha_i\alpha_{l_{j-1}})\alpha_i \in S_i, \\ i-1 & \text{sinon } (b_j \in C_i). \end{cases}$
-

3 Définition des pyramides de n -G-cartes

Une pyramide de n -G-cartes est une structure hiérarchique dont chaque niveau est une n -G-carte. Le premier niveau représente les données initiales, les autres niveaux représentent des simplifications successives. Une construction bottom-up possible est la suivante. Le niveau 0 est une n -G-carte représentant les données initiales. Selon l’application, un processus définit deux ensembles pour chaque dimension i ($i \in N$) : S_i^0 (resp. C_i^0) est l’ensemble de i -cellules qui vont être supprimées (resp. contractées). Les cellules de ces ensembles doivent satisfaire les pré-conditions de l’opération de suppressions et contractions simultanées. L’application de cette opération a pour

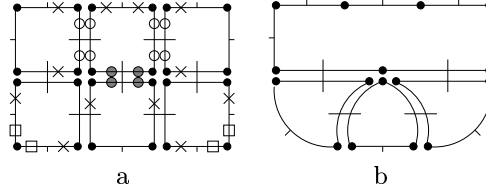


FIG. 2 – Exemple de suppressions et contractions simultanées. (a) Une 2-G-carte. Les brins concernés par des 0-suppressions, 1-suppressions et 1-contractions sont respectivement représentés par des carrés vides, des cercles et des disques gris. Les brins voisins sont représentés par des croix. (b) La 2-G-carte résultante.

résultat la n -G-carte du niveau 1. Ce processus est ré-appliqué afin d'obtenir les autres niveaux de la pyramide.

La définition formelle d'une pyramide de n -G-cartes est la suivante :

Définition 4 (Pyramide de n -G-cartes) : Soit $n, m \geq 0$. Une pyramide $\mathcal{P}$ de n -G-cartes comportant $m + 1$ niveaux est l'ensemble $\mathcal{P} = \{G^a\}_{0 \leq a \leq m}$ où :

1. $\forall a, 0 \leq a \leq m, G^a$ est la n -G-carte $(B^a, \alpha_0^a, \dots, \alpha_n^a)$,
 2. Pour chaque $a, 0 \leq a \leq m$, pour chaque $i, 0 \leq i < n$, soit S_i^a (resp. C_i^a) l'ensemble des i -cellules du niveau a telles que ces cellules soient disjointes deux à deux et que le degré de chaque cellule soit 2 i.e. :
 - $\forall C, C' \in \bigcup_{i=0}^n (S_i^a \cup C_i^a), C \cap C' = \emptyset$,
 - $\forall i, 0 \leq i \leq n-2, \forall d \in S_i^a, d\alpha_{i+1}^a \alpha_{i+2}^a = d\alpha_{i+2}^a \alpha_{i+1}^a$,
 - $\forall i, 2 \leq i \leq n, \forall d \in C_i^a, d\alpha_{i-1}^a \alpha_{i-2}^a = d\alpha_{i-2}^a \alpha_{i-1}^a$,
 3. $\forall a, 0 < a \leq m, G^a$ est obtenue à partir de G^{a-1} en supprimant les cellules de $\bigcup_{i=0}^n S_i^{a-1}$ et en contractant les cellules de $\bigcup_{i=0}^n C_i^{a-1}$ (en appliquant l'opération générale de suppression/contraction).
-

Des exemples de pyramide 2D et 3D sont représentés figures 3 et 4.

Deux propriétés majeures des pyramides de n -G-cartes sont :

- chaque brin appartenant à une cellule supprimée ou contractée au niveau a ne peut appartenir à une autre cellule supprimée ou contractée du même niveau ou d'un autre niveau ;
- Soit $a, 0 \leq a < m$. Nous pouvons noter qu'une bijection φ^a existe entre les brins survivants de G^a (i.e. les brins qui ne sont pas supprimés ni contractés), et les brins de G^{a+1} ($\varphi^a : B^a - \bigcup_{i=0}^n (S_i^a \cup C_i^a) \longrightarrow B^{a+1}$). Afin de simplifier les notations, nous noterons un brin de G^a et son image dans G^{a+1} par le même nom. Nous avons alors : $B^{a+1} = B^a - \bigcup_{i=0}^n (S_i^a \cup C_i^a)$.

Plus formellement :

Proposition 1 :

1. $\forall a, 0 \leq a < m, B^{a+1} \subseteq B^a$.
 2. $\forall i, j \in N, \forall a, d \in [0..m-1]$ nous avons :

$$\begin{cases} S_i^a \cap C_j^d = \emptyset, \\ S_i^a \cap S_j^d = \emptyset, \text{ avec } i \neq j \text{ ou } a \neq d, \\ C_i^a \cap C_j^d = \emptyset, \text{ avec } i \neq j \text{ ou } a \neq d. \end{cases}$$
-

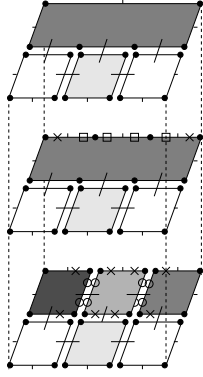


FIG. 3 – Une pyramide de 2-G-cartes composée de trois niveaux. Les brins de 0-cellules (resp. 1-cellules) supprimées sont marqués par des carrés vides (resp. des cercles).

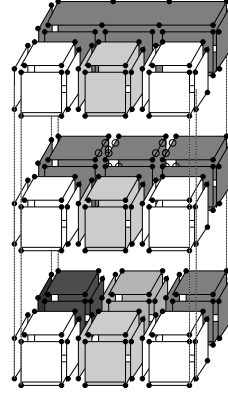


FIG. 4 – Une pyramide de 3-G-cartes composées de 3 niveaux. Le second niveau est obtenu en supprimant 2 faces, et le troisième niveau est obtenu en supprimant 4 arêtes (Les deux arêtes du haut et les deux arêtes du fond qui sont adjacentes aux premières).

Ces propriétés sont aisément déduites de la définition de l'opération de suppressions contractions [12] et de la définition de pyramide de n -G-cartes.

Dans la suite nous noterons $\mathcal{P}$ une pyramide de n -G-cartes comportant $m+1$ niveaux numérotés de 0 à m . Le niveau a désigne la n -G-carte G^a . Un brin garde son nom tant qu'il n'est pas disparu. Parmi l'ensemble des brins survivants, c'est à dire les brins non contractés ni supprimés, on distingue l'ensemble des brins survivants voisins de i -suppression ou i -contraction ($i \in N$) que l'on note BS_i ou BS_i^a lorsque l'on désire préciser que l'on se place au niveau a de la pyramide. En utilisant mes notations précédentes on a : $BS_i = (S_i \cup C_i)\alpha_i - (S_i \cup C_i)$. Comme $B^{a+1} \subseteq B^a$ pour tout a , $0 \leq a \leq n$, chaque brin apparaît pour la première fois au niveau 0 de la pyramide, et si un brin appartient au niveau a il n'appartient pas à une cellule supprimée ou contractée d'un précédent niveau. Niv_b désigne le dernier niveau de la pyramide dans lequel le brin b existe. N indique l'ensemble des indices des involutions composant une n -G-carte. $\langle \rangle_N$ permet alors de formaliser les différentes composantes connexes d'une n -G-carte et pour $K \subseteq N$, $\langle \rangle_K$ exprime une orbite de la n -G-carte. Dans le cas de la n -G-carte G^a de la pyramide $\mathcal{P}$ nous noterons : $\langle \rangle_{(K)^a} (b) = \langle \alpha_{k_0}^a, \dots, \alpha_{k_p}^a \rangle (b)$, l'orbite issue de K avec $K = \{k_0, \dots, k_p\} \subseteq N$.

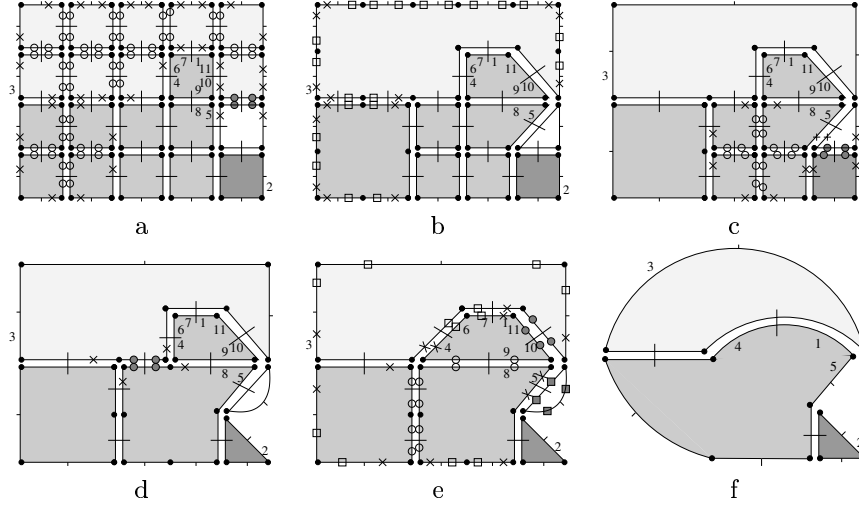


FIG. 5 – Une pyramide. a (resp. b, c, d, e, et f) représente le niveau 0 (resp. 1, 2, 3, 4 et 5). Les brins 0-supprimés (resp. 1-supprimés, 1-contractés et 2-contractés) sont marqués par des carrés vides (resp. des cercles, des disques gris et des carrés gris). Les faces du niveau 5 et les faces généralisées correspondantes dans les niveaux inférieurs sont représentées en différents niveaux de gris.

4 Chemins de connection

Plaçons nous dans le cadre du traitement et de l'analyse d'image. Nous associons à une pyramide $\mathcal{P}$, une image en niveaux de gris segmentée à différents niveaux selon un critère d'homogénéité. Par soucis d'économie en place mémoire, on peut ne pas vouloir garder toutes les informations (comme les niveaux de gris par exemple) à tous les niveaux de la pyramide. Dans ce cas il faut être capable de les retrouver. Ainsi il faut pouvoir retrouver la ou les cellules détenant les informations nécessaires. Par exemple, pour connaître le niveau de gris d'une n -cellule, c'est à dire d'une région à un certain niveau de la pyramide, il faut tout d'abord savoir quelles sont les n -cellules (représentant les xels) du niveau initial qui correspondent à cette région, puis déduire le niveau de gris recherché en utilisant ceux des n -cellules trouvées.

Plus généralement, soit a et d deux niveaux d'une pyramide $\mathcal{P}$ de n -G-cartes tels que $0 \leq a \leq d \leq m$. Soit $\mathcal{O} = \langle \rangle_{(K)^a} (b)$ une orbite de G^d , la n -G-carte du niveau d de $\mathcal{P}$. On peut alors se poser la question suivante : quels sont les brins du niveau a qui correspondent à l'orbite $\mathcal{O}$ et forment ainsi l'orbite généralisée issue de K au niveau a (voir figure 5). Dans le but de répondre à ce problème, nous allons dans cette section, introduire la notion de chemin de connection, puis celle de chemin de connection étendu, dans le cadre d'une pyramide de n -G-cartes et examiner certaines propriétés de ces chemins, pour ensuite définir la notion d'orbite généralisée dans la section suivante.

4.1 Chemins de connection

La notion de chemin de connection ("connecting walk" en anglais) a été définie par Brun et Kropatsch. Dans leurs travaux elle est définie entre deux niveaux consécutifs d'une pyramide de cartes combinatoires, et représente l'ensemble des brins d'un niveau donné qui séparent un brin survivant et son successeur au niveau suivant. Dans la suite, nous allons étendre cette notion de chemin de connection. Dans une première partie nous donnerons quelques définitions, puis dans la deuxième partie nous examinerons certaines propriétés.

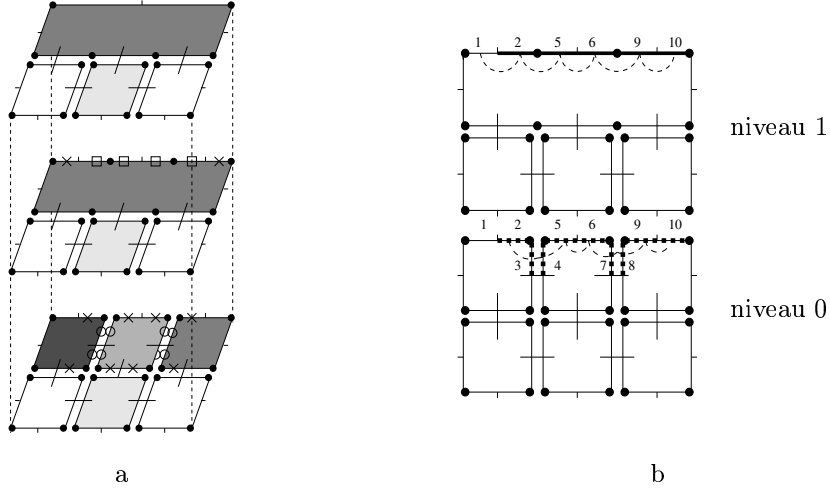


FIG. 6 – (a) Exemple de pyramide de 2-G-cartes composée de trois niveaux. Les brins 0-supprimés (resp. 1-supprimés) sont marqués par des carrés vides (resp. des cercles). (b) Deux niveaux de la pyramide. Les brins du chemin de connection $Ch_{(0,1,2)}(1)$ sont dessinés en gras. Ces brins se trouvent entre les brins 1 et 10, où $10 = 1\alpha_0^2$: $Ch_{(0,1,2)}(1) = (2, 5, 6, 9, 10) = (1\alpha_0^1, 1\alpha_0^1\alpha_1^1, 1\alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_0^1, 1\alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_0^1\alpha_1^1, 1\alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_0^1)$. $Ech_{(0,1,2)}^\circ(1) = \{2, 5, 6, 9\}$, et $Ech_{(0,1,2)}(1) = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$. Les brins du chemin de connection $Ch_{(0,0,2)}(1)$ sont dessinés en pointillés, et $Ch_{(0,0,2)}(1) = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$.

4.1.1 Définitions

Nous étendons ici la notion de chemin de connection pour les pyramides de n -G-cartes et pour deux niveaux quelconques. Un chemin de connection est alors une séquence de brins d'un niveau inférieur qui sépare deux brins d'un niveau supérieur. Plus précisément, soit $Ch_{(i,a,d)}(b)$ le chemin de connection entre les niveaux a et d ($a \leq d$), pour le brin $b \in B^d$ et la dimension i .

Quand $d = a + 1$, nous avons une définition proche de celle de Brun et Kropatsch. En effet, $Ch_{(i,a,a+1)}(b)$ qui est la séquence de brins du niveau a séparant le brin b et son voisin pour α_i^{a+1} , est alors la séquence de brins supprimés et contractés entre les niveaux a et $a + 1$ reliant b et $b\alpha_i^{a+1}$. Les brins de cette séquence sont ceux parcourus lors de la redéfinition de $b\alpha_i^{a+1}$ dans la définition de l'opération de suppressions et contractions simultanées de cellules de dimension quelconque (def 3).

Quand $d > a + 1$, $Ch_{(i,a,d)}(b)$ qui est la séquence de brins du niveau a séparant le brin b et son voisin pour α_i^d , est la séquence des brins supprimés et contractés entre les niveaux a et d reliant b et $b\alpha_i^d$. En s'appuyant sur la définition de contractions et suppressions de cellules, on peut réitérer le processus expliqué précédemment de niveau en niveau. Ainsi on peut exprimer $Ch_{(i,a,d)}(b)$ comme une concaténation de chemins examinés entre les niveaux a et $d - 1$. On obtient alors une définition récursive de $Ch_{(i,a,d)}(b)$.

Dans le cas particulier où il n'existe pas de brin entre b et son voisin par α_i^d au niveau $d - 1$, c'est à dire où b n'est pas le voisin pour α_i^{d-1} d'un brin supprimé ou contracté, alors la concaténation de chemins formant $Ch_{(i,a,d)}(b)$ se résume à un seul chemin : $Ch_{(i,a,d-1)}(b)$.

On peut observer que le chemin de connection $Ch_{(i,a,a)}(b)$, n'est composé que d'un seul brin : $b\alpha_i^a$, car il n'existe aucun brin au niveau a séparant b et $b\alpha_i^a$.

On peut voir figure 6 un exemple de chemin de connection qui peut être formellement défini de la manière suivante.

Définition 5 (Chemin de connection (version récursive)) : Soit $i \in N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Pour chaque brin $b \in B^d$, $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est défini par :

si $d = a$: $Ch_{(i,a,d)}(b) = (b\alpha_i^a)$,

sinon si $b \notin BS_i^{d-1}$: $Ch_{(i,a,d)}(b) = Ch_{(i,a,d-1)}(b)$,

sinon : $Ch_{(i,a,d)}(b) = C = \left(Ch_{(k_1,a,d-1)}(b_1), Ch_{(k_2,a,d-1)}(b_2), \dots, Ch_{(k_p,a,d-1)}(b_p) \right)$,

où : $b_1 = b$,

$\forall u, 1 \leq u < p$, b_{u+1} est le dernier brin de $Ch_{(k_u,a,d-1)}(b_u)$,

$$\forall u, 1 \leq u \leq p, k_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^{d-1}, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^{d-1}, \end{cases}$$

et p est le plus petit entier tel que le dernier brin de C appartienne à BS_i^{d-1} .

La définition 5 définit donc la notion de chemin de connection de manière récursive. Une autre manière de définir cette notion est de le faire itérativement.

Dans le cas où $b \in B^d$, le chemin de connection $Ch_{(i,a,d)}(b)$ qui est la séquence de brins du niveau a reliant b et son voisin pour α_i^d , est la séquence des brins supprimés et contractés entre les niveaux a et d . Du fait de la définition de l'opération de suppression et contraction de cellules on sait que des relations existent entre les brins d'une telle séquence. Lorsque l'on cherche la séquence de brins correspondant à $Ch_{(i,a,d)}(b)$, le premier brin du chemin est $b_1 = b\alpha_i^a$. Concernant les brins suivants, s'il y en a, ce sont ceux parcourus lors de la redéfinition de α_i^d pour le brin b par l'opération de contraction/suppression appliquée de niveau en niveau. Lors de la redéfinition de α_i^d par rapport au niveau précédent on a deux cas : soit $b\alpha_i^d = b\alpha_i^{d-1}$, soit $b\alpha_i^d = b\alpha_i^{d-1}(\alpha_{l_1}^{d-1}\alpha_i^{d-1}) \dots (\alpha_{l_r}^{d-1}\alpha_i^{d-1})$ avec $l_1, \dots, l_r$ et r correspondant à la définition 3 page 6. Dans ce deuxième cas, si l'on appelle b_l ($1 \leq l \leq r+1$) chaque brin parcouru par cette redéfinition c'est à dire chaque brin b_l tel que :

$$b_0 = b \text{ et } b_l = b_{l-1}\alpha_{i_{l-1}}^{d-1} \text{ avec } i_{l-1} = \begin{cases} i & \text{si } l \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } l \text{ est pair et } b_{l-1} \in S_i^{d-1}, \\ i-1 & \text{si } l \text{ est pair et } b_{l-1} \in C_i^{d-1}, \end{cases}$$

on remarque que chaque b_l est dans l'un des 4 cas suivants :

1. on est arrivé à ce brin par α_i^{d-1} , il appartient à S_i^{d-1} , et on en repart par α_{i+1}^{d-1} ,
2. on est arrivé à ce brin par α_{i+1}^{d-1} , il appartient à S_i^{d-1} , et on en repart par α_i^{d-1} ,
3. on est arrivé à ce brin par α_i^{d-1} , il appartient à C_i^{d-1} , et on en repart par α_{i-1}^{d-1} ,
4. on est arrivé à ce brin par α_{i-1}^{d-1} , il appartient à C_i^{d-1} , et on en repart par α_i^{d-1} .

Ce qui peut être reformulé de la manière suivante : pour chacun de ces brins si on y est arrivé par α_j^{d-1} ($j \in \{i, i+1, i-1\}$), pour déterminer comment on en repart et donc quel est le prochain brin on a alors deux cas :

- si le brin est j -supprimé ou $(j-1)$ -contracté, alors la prochaine involution appliquée sera α_{j+1}^{d-1} (cas 1 et 4 ci-dessus),
- et si le brin est j -contracté ou $(j+1)$ -supprimé, alors la prochaine involution appliquée sera α_{j-1}^{d-1} (cas 2 et 3 ci-dessus).

En appliquant ce raisonnement de niveau en niveau, au cours des redéfinitions de α_i^d pour le brin b jusqu'au niveau a , on obtient alors que lorsque l'on se trouve sur un brin du chemin (après avoir effectué α_j^a avec $j \in N$), le brin suivant s'il existe est obtenu par :

- α_{j+1}^a si le brin est j -supprimé ou $(j-1)$ -contracté,
- ou α_{j-1}^a si le brin est j -contracté ou $(j+1)$ -supprimé.

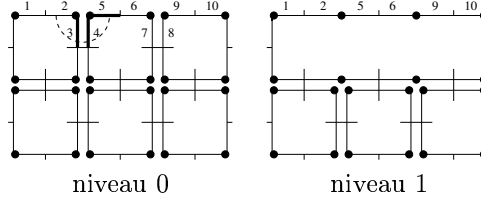


FIG. 7 – Illustration de la proposition 2 page 12. Le chemin de connection issu de 2, $Ch_{(1,0,1)}(2) = (3, 4, 5)$, a pour dernier brin 5 qui correspond au brin $2.\alpha_1^1$.

De cette manière on peut construire la séquence de brins correspondant à $Ch_{(i,a,d)}(b)$, en passant d'un brin à l'autre de manière similaire à celle employée lors de la définition de l'opération de suppressions et contractions simultanées de cellules.

Dans le cas particulier où il n'y a pas de brin entre b et son voisin pour α_i^d au niveau a , c'est à dire que b n'a jamais été le voisin d'une i -cellule supprimée, $Ch_{(i,a,d)}(b) = (b\alpha_i^a)$.

Nous obtenons ainsi la définition itérative suivante :

Définition 6 (Chemin de connection (version itérative)) : Soit $i \in N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Pour chaque brin $b \in B^d$, $Ch2_{(i,a,d)}(b)$ est défini par :

si $b \notin \bigcup_{k=a}^{d-1} BS_i^k$: $Ch2_{(i,a,d)}(b) = (b\alpha_i^a)$,
sinon : $Ch2_{(i,a,d)}(b) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_r)$, avec

$$b'_0 = b, t_0 = i,$$

$$\forall v, 1 \leq v \leq r, b'_v = b'_{v-1}\alpha_{t'_{v-1}}^a$$

$$\forall v, 1 \leq v < r, t'_v = \begin{cases} t'_{v-1} + 1 & \text{si } b'_v \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t'_{v-1}}^k \cup C_{t'_{v-1}+1}^k), \\ t'_{v-1} - 1 & \text{si } b'_v \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t'_{v-1}-1}^k \cup C_{t'_{v-1}}^k), \end{cases}$$

et r est le plus petit entier tel que b'_r appartienne à B^d .

Nous avons ainsi défini de deux manières (récursivement et itérativement) les chemins de connection. Avant de faire part des deux algorithmes que l'on peut en déduire, nous démontrons ici l'équivalence de ces deux définitions. Pour cela nous allons tout d'abord démontrer deux propriétés des chemins de connection définis selon la première définition.

Proposition 2 : $\forall i \in N, \forall a, d$ tels que $0 \leq a \leq d \leq m, \forall b \in B^d$, on a :
le dernier brin de $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est $b\alpha_i^d$.

Preuve : Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq a \leq m$.

Nous allons montrer par récurrence sur d que $\forall d \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq d \leq m$, l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{H}_d) : \forall b \in B^d, \forall i \in N, \text{ le dernier brin de } Ch_{(i,a,d)}(b) \text{ est } b\alpha_i^d.$$

– pour $d = a$,

Soit $b \in B^a$, et $i \in N$.

Nous savons par la définition 5 page 11 que $Ch_{(i,a,a)}(b) = (b\alpha_i^a)$.

Donc le dernier brin de $Ch_{(i,a,a)}(b)$ est $b\alpha_i^a$.

Et ceci est vrai quelque soit $b \in B^a$ et $i \in N$.

Donc l'hypothèse $\mathcal{H}_a$ est vraie.

- supposons $\mathcal{H}_d$ vraie pour $a \leq d < m$, et montrons que $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Soit $b \in B^{d+1}$ et $i \in N$.

Nous devons étudier 2 cas : celui où $b \notin BS_i^d$ et celui où $b \in BS_i^d$.

- si $b \notin BS_i^d$, on a $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = Ch_{(i,a,d)}(b)$.

Comme on suppose l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ vraie, le dernier brin de $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est $b\alpha_i^d$.

D'autre part, d'après la définition de contractions et suppressions simultanées (définition 3 page 6), on a : $b\alpha_i^{d+1} = b\alpha_i^d$ car $b \notin BS_i^d$.

Par suite, le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ est $b\alpha_i^{d+1}$.

Et ceci est vrai quelque soit $b \in B^{d+1} - BS_i^d$, et $i \in N$. Et donc dans ce cas $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

- si $b \in BS_i^d$, alors $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ se décompose alors de la manière suivante :

$$Ch_{(i,a,d+1)}(b) = \left(Ch_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d)}(b_p) \right).$$

Nous allons tout d'abord montrer par récurrence sur l , que $\forall l, 2 \leq l \leq p$, l'hypothèse $\mathcal{G}_l$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{G}_l) : b_l = b\alpha_{k_1}^d \dots \alpha_{k_{l-1}}^d \in B^d$$

- pour $l = 2$,

Par construction, b_2 est le dernier brin de $Ch_{(k_1,a,d)}(b_1)$. Comme $b_1 = b \in BS_i^d$ (d'où $b \in B^d$), d'après $\mathcal{H}_d$, le dernier brin de $Ch_{(k_1,a,d)}(b)$ est $b\alpha_{k_1}^d$.

D'où $b_2 = b\alpha_{k_1}^d$ et $b_2 \in B^d$.

Et donc $\mathcal{G}_2$ est vraie.

- supposons que $\mathcal{G}_l$ est vraie pour $2 \leq l < p$ et montrons que $\mathcal{G}_{l+1}$ est vraie.

D'après ce que l'on a écrit précédemment b_{l+1} est le dernier brin de $Ch_{(k_l,a,d)}(b_l)$, et $b_{l+1} \in B^d$.

Selon $\mathcal{H}_d$ on a $b_{l+1} = b_l\alpha_{k_l}^d$.

Or $\mathcal{G}_l$ étant vraie on a : $b_l = b\alpha_{k_1}^d \dots \alpha_{k_{l-1}}^d \in B^d$.

On en déduit alors que $\mathcal{G}_{l+1}$ est vraie.

Donc $\mathcal{G}_l$ est vraie pour tout l tel que $1 \leq l \leq p$, c'est à dire que $\forall l, 2 \leq l \leq p$, $b_l = b\alpha_{k_1}^d \dots \alpha_{k_{l-1}}^d \in B^d$.

Soit b' le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$. b' est également le dernier brin de $Ch_{(k_p,a,d)}(b_p)$.

En appliquant $\mathcal{H}_d$ au brin b_p on a : $b' = b_p\alpha_{k_p}^d$.

Et en appliquant l'hypothèse $(\mathcal{G}_p)$ on a $b_p = b\alpha_{k_1}^d \dots \alpha_{k_{p-1}}^d$.

D'où $b' = b\alpha_{k_1}^d \dots \alpha_{k_p}^d$.

En remplaçant les k_u impairs, $1 \leq u \leq p$, par leur valeur i on obtient alors $b' = b(\alpha_i^d \alpha_{k_2}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k_{[p/2]}}^d) \alpha_i^d$, ou $b' = b(\alpha_i^d \alpha_{k_2}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k_{[p/2]}}^d)$, suivant si p est impair ou pair.

Montrons que nécessairement p est impair.

Pour cela nous allons montrer par récurrence sur u , $2 \leq u \leq p$ que l'hypothèse suivante est vraie :

si u est impair alors $b_u \in S_i^d \cup C_i^d$ et si u est pair alors $b_u \in S_i^d \cup C_i^d \cup BS_i^d$.

- pour $u = 2$ et $u = 3$:

Puisque $b = b_1 \in BS_i^d$ c'est à dire b_1 est un brin voisin d'une i -suppression ou d'une i -contraction alors $b_1\alpha_i^d$ est un brin appartenant à une cellule i -supprimée ou i -contractée.

Comme $b_2 = b_1\alpha_{k_1}^d = b\alpha_i^d$, alors $b_2 \in S_i^d \cup C_i^d$.

Puisque $b_2 \in S_i^d \cup C_i^d$, $b_3 = b_2\alpha_{k_2}^d$ avec $k_2 = i + 1$ ou $k_2 = i - 1$, et que par α_{i+1}^d ou α_{i-1}^d on reste dans la même i -cellule alors b_3 appartient à la même i -cellule que b_2 d'où $b_3 \in S_i^d \cup C_i^d$.

Donc l'hypothèse est bien vraie pour $u = 2$ et $u = 3$.

- Supposons l'hypothèse vraie pour u , $2 \leq u < p$, et montrons qu'elle est encore vraie pour $u + 1$.
- Si $u + 1$ est pair, u est impair et par hypothèse on a $b_u \in S_i^d \cup C_i^d$ et $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^d$ avec $k_u = i$. En appliquant α_i^d à b_u on sort de la i -cellule contenant b_u et soit on arrive sur une autre i -cellule contractée ou supprimée, soit on arrive sur un brin survivant voisin. D'où $b_{u+1} \in S_i^d \cup C_i^d \cup BS_i^d$.
- Si $u + 1$ est impair, u est pair et par hypothèse on a $b_u \in BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d$ et $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^d$ avec $k_u = i + 1$ ou $k_u = i - 1$. En appliquant α_{i+1}^d ou α_{i-1}^d à b_u on reste dans la même i -cellule. D'autre part puisque l'on suppose b_u comme n'étant pas le dernier brin du chemin alors $b_u \in \cup S_i^d \cup C_i^d$ et pas à BS_i^d . On a alors $b_{u+1} \in S_i^d \cup C_i^d$.

Donc si u est impair alors $b_u \in S_i^d \cup C_i^d$ et si u est pair alors $b_u \in S_i^d \cup C_i^d \cup BS_i^d$.

Ce qui implique que p est impair et donc :

$$b' = b(\alpha_i^d \alpha_{k_2}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k_{[p/2]}}^d) \alpha_i^d. \quad (1)$$

Ce que l'on peut également écrire :

$$b' = b(\alpha_i^d \alpha_{k'_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k'_q}^d) \alpha_i^d. \quad (2)$$

en posant $k'_u = k_{2u}$ pour $1 \leq u \leq q$.

Puisque $b \in BS_i^d$, en utilisant la définition 3 page 6 concernant les suppressions et contractions simultanées de cellules, on obtient :

$$b \alpha_i^{d+1} = b(\alpha_i^d \alpha_{u_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{u_r}^d) \alpha_i^d \quad (3)$$

avec r le plus petit entier tel que $b \alpha_i^{d+1} \in BS_i^d$ et pour $1 \leq s \leq r$:

$$u_s = \begin{cases} i + 1 & \text{si } b(\alpha_i^d \alpha_{u_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{u_{s-1}}^d) \alpha_i^d \in S_i^d, \\ i - 1 & \text{sinon } b(\alpha_i^d \alpha_{u_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{u_{s-1}}^d) \alpha_i^d \in C_i^d. \end{cases}$$

Supposons $r \leq q$.

Nous allons montrer par récurrence sur s , que pour tout s , $1 \leq s \leq r$, $u_s = k'_s$.

– pour $s = 1$

$$\begin{aligned} \text{par hypothèses : } u_1 &= \begin{cases} i + 1 & \text{si } b \alpha_i^d \in S_i^d \\ i - 1 & \text{sinon } (b \alpha_i^d \in C_i^d) \end{cases} \\ \text{et } k'_1 &= \begin{cases} i + 1 & \text{si } b \alpha_i^d \in S_i^d \\ i - 1 & \text{sinon } (b \alpha_i^d \in C_i^d) \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $u_1 = k'_1$.

– supposons que $u_s = k'_s$ pour $1 \leq s < r$ et montrons que $u_{s+1} = k'_{s+1}$.

par hypothèses :

$$\begin{aligned} u_{s+1} &= \begin{cases} i + 1 & \text{si } b(\alpha_i^d \alpha_{u_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{u_s}^d) \alpha_i^d \in S_i^d \\ i - 1 & \text{sinon } (b(\alpha_i^d \alpha_{u_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{u_s}^d) \alpha_i^d \in C_i^d) \end{cases} \\ \text{et } k'_{s+1} &= \begin{cases} i + 1 & \text{si } b(\alpha_i^d \alpha_{k'_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k'_s}^d) \alpha_i^d \in S_i^d \\ i - 1 & \text{sinon } (b(\alpha_i^d \alpha_{k'_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k'_s}^d) \alpha_i^d \in C_i^d) \end{cases} \end{aligned}$$

Or $u_s = k'_s$ pour tout s , $1 \leq s < r$ d'où :

$$b(\alpha_i^d \alpha_{u_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{u_s}^d) \alpha_i^d = b(\alpha_i^d \alpha_{k'_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k'_s}^d) \alpha_i^d.$$

Donc $u_{s+1} = k'_{s+1}$.

Donc $u_s = k'_s$ pour tout s , $1 \leq s \leq r$.

Par ce résultat et du fait des équations (2) et (3), nous avons :

$$b' = b(\alpha_i^d \alpha_{u_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{u_q}^d) \alpha_i^d \text{ et } b\alpha_i^{d+1} = b(\alpha_i^d \alpha_{u_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{u_r}^d) \alpha_i^d.$$

$b\alpha_i^{d+1}$ fait alors partie du chemin qui relie b et b' .

On a $b\alpha_i^{d+1}$ et $b' \in BS_i^d$. Puisque b' est le dernier brin du chemin $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$, on sait alors par définition que b' est le premier brin du chemin qui appartient à BS_i^d . Donc nécessairement $b' = b\alpha_i^{d+1}$ et $r = q$.

Donc $b\alpha_i^{d+1}$ est le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$.

Et ceci est vrai quelque soit $b \in B^{d+1} \cap BS_i^d$, et $i \in N$. Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie dans ce cas.

Donc dans les deux cas $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Donc $\forall d, a \leq d \leq m$, $\mathcal{H}_d$ est vraie. C'est à dire :

$\forall d, a \leq d \leq m, \forall b \in B^d, \forall i \in N$, le dernier brin de $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est $b\alpha_i^d$.

Et toute cette démonstration est vraie quelque soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq a \leq m$.

□

Proposition 3 : $\forall i \in N, \forall a, d$ tels que $0 \leq a \leq d \leq m, \forall b \in B^d$:

la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a .

Preuve :

Soit $a \in N$ tel que $0 \leq a \leq m$.

Nous allons montrer par récurrence sur $d, a \leq d \leq m$, que l'hypothèse suivante est vraie :

$(\mathcal{H}_d)$: $\forall b \in B^d$, la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a .

– pour $d = a$.

Soit $i \in N$ et $b \in B^a$.

On a par définition (5 page 11), $Ch_{(i,a,a)}(b) = (b\alpha_i^a)$. Donc la dernière involution effectuée lors du parcours de la séquence représentant $Ch_{(i,a,a)}(b)$ est bien α_i^a .

Et ceci est vrai quelque soit $i \in N$ et $b \in B^a$.

Donc $\mathcal{H}_a$ est vraie.

– supposons $\mathcal{H}_d$ vraie pour $a \leq d < m$ et montrons que $\mathcal{H}_{d+1}$ est également vraie.

Soit $i \in N$ et $b \in B^d$.

Nous allons examiner deux cas : $b \notin BS_i^d$ et $b \in BS_i^d$.

Lorsque $b \notin BS_i^d$, nous avons par définition (5 page 11), $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = Ch_{(i,a,d)}(b)$.

Or nous supposons $\mathcal{H}_d$ vraie, c'est à dire la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a car $b \in B^d$.

Donc lorsque $b \notin BS_i^d$, la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ est α_i^a .

Lorsque $b \in BS_i^d$, nous avons par définition (5 page 11),

$$Ch_{(i,a,d+1)}(b) = \left(Ch_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d)}(b_p) \right),$$

où : $b_1 = b$,

$\forall u, 1 \leq u < p, b_{u+1}$ est le dernier brin de $Ch_{(k_u,a,d)}(b_u)$,

$$\forall u, 1 \leq u \leq p, k_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^d, \end{cases}$$

et p est le plus petit entier tel que le dernier brin (b_{p+1}) appartienne à BS_i^d .

On a $b \in B^d$, d'où en utilisant la proposition 2 page 12, on peut montrer par récurrence que $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^d \in B^d$ pour $1 \leq u \leq p$. On en déduit alors que $b_{p+1} = b \alpha_{k_1}^d \alpha_{k_2}^d \dots \alpha_{k_p}^d$.

Comme $b \in BS_i^d$, nous avons $b \in B^{d+1}$. b_{p+1} étant le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$, en utilisant la proposition 2 page 12, on a $b_{p+1} = b \alpha_i^{d+1}$. Nous avons également grâce à la définition de l'opération de suppressions et contractions simultanées, $b \alpha_i^{d+1} = b(\alpha_i^d \alpha_{k'_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k'_r}^d) \alpha_i^d$ avec $k'_v = i + 1$ si $b(\alpha_i^d \alpha_{k'_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k'_r}^d) \alpha_i^d \in S_i^d$ et $k'_v = i - 1$ si $b(\alpha_i^d \alpha_{k'_1}^d) \dots (\alpha_i^d \alpha_{k'_r}^d) \alpha_i^d \in C_i^d$, pour $1 \leq v \leq r$.

En comparant élément par élément les deux écritures de $b \alpha_i^{d+1}$ on obtient :

$$\begin{aligned} k_u &= \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair} \\ k'_{u/2} & \text{sinon} \end{cases} \\ r &= (p-1)/2 \\ \text{et } k_p &= i \end{aligned}$$

Par définition on sait que le dernier brin (resp. la dernière involution) de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ est également celui (resp. celle) de $Ch_{(k_p,a,d)}(b_p)$.

Puisque l'on suppose l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ vraie, on sait que la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $Ch_{(k_p,a,d)}(b_p)$ est $\alpha_{k_p}^a$ car $b_p \in B^d$. Donc lorsque $b \in BS_i^d$, la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ est α_i^a .

Et toute cette démonstration est vraie quelque soit $i \in N$ et $b \in B^d$.

Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Donc $\mathcal{H}_d$ est vraie quelque soit d , $a \leq d \leq m$.

Et toute cette démonstration est vraie quelque soit $a \in N$.

□

Proposition 4 : Les deux définitions du chemin de connection sont équivalentes. i.e. pour $i \in N$, a, d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$ et $b \in B^d$, nous avons : $Ch_{(i,a,d)}(b) = Ch2_{(i,a,d)}(b)$.

Preuve :

Soit a tels que $0 \leq a \leq m$.

Montrons par récurrence sur d ($a \leq d \leq m$) l'hypothèse ($\mathcal{H}_d$) suivante :

$$(\mathcal{H}_d) : \forall b \in B^d, \forall i \in N, Ch_{(i,a,d)}(b) = Ch2_{(i,a,d)}(b).$$

Pour $d=a$:

Soit $i \in N$ et $b \in B^a$.

On a par définition $Ch_{(i,a,a)}(b) = (b \alpha_i^a)$.

Toujours par définition on a $Ch2_{(i,a,a)}(b) = (b \alpha_i^a)$ car $b \in B^a - \bigcup_{k=a}^{a-1} BS_i^k = B^a$.

D'où $Ch_{(i,a,a)}(b) = Ch2_{(i,a,a)}(b)$.

Et ceci est vrai quelque soit $i \in N$ et $b \in B^a$.

Donc l'hypothèse $\mathcal{H}_a$ est vraie.

Supposons $\mathcal{H}_d$ vraie pour $a \leq d < m$ et montrons qu'elle est encore vraie pour $d+1$.

Soit $i \in N$ et $b \in B^{d+1}$.

Nous allons examiner les deux cas possibles : $b \notin BS_i^d$ et $b \in BS_i^d$.

Regardons dans un premier temps le cas où $b \notin BS_i^d$.

Nous avons par définition $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = Ch_{(i,a,d)}(b)$.

Or par hypothèse de récurrence $Ch_{(i,a,d)}(b) = Ch2_{(i,a,d)}(b)$.

Donc pour montrer que $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = Ch2_{(i,a,d+1)}(b)$, il faut montrer que $Ch2_{(i,a,d+1)}(b) = Ch2_{(i,a,d)}(b)$.

Soit $Ch2_{(i,a,d+1)}(b) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_r)$ et $Ch2_{(i,a,d)}(b) = (b''_1, b''_2, \dots, b''_q)$ avec $b'_{u+1} = b'_u \alpha_{t'_u}^a$ et $b''_{u+1} = b''_u \alpha_{t''_u}^a$ où $t'_0 = t''_0 = i$, $b'_1 = b''_1 = b \alpha_i^a$ et

$$\forall u, 1 \leq u < r, t'_u = \begin{cases} t'_{u-1} + 1 & \text{si } b'_u \in \bigcup_{k=a}^d (S_{t'_{u-1}}^k \cup C_{t'_{u-1}+1}^k), \\ t'_{u-1} - 1 & \text{si } b'_u \in \bigcup_{k=a}^d (S_{t'_{u-1}-1}^k \cup C_{t'_{u-1}}^k), \end{cases}$$

$$\text{et } \forall u, 1 \leq u < q, t''_u = \begin{cases} t''_{u-1} + 1 & \text{si } b''_u \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t''_{u-1}}^k \cup C_{t''_{u-1}+1}^k), \\ t''_{u-1} - 1 & \text{si } b''_u \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t''_{u-1}-1}^k \cup C_{t''_{u-1}}^k). \end{cases}$$

Montrons tout d'abord par récurrence sur u , que pour $1 \leq u \leq \min\{r, q\}$, $b'_u = b''_u$ et $t'_{u-1} = t''_{u-1}$.

– pour $u = 1$

On a par définition $b'_1 = b \alpha_i^a$ et $b''_1 = b \alpha_i^a$. Par définition on a également $t'_0 = i = t''_0$.

Donc $b'_1 = b''_1$ et $t'_0 = t''_0$.

– supposons $b'_u = b''_u$ et $t'_{u-1} = t''_{u-1}$ pour $1 \leq u < \min\{r, q\}$ et montrons que $b'_{u+1} = b''_{u+1}$ et que $t'_u = t''_u$.

Comme $b'_{u+1} = b'_u \alpha_{t'_u}^a$ et $b''_{u+1} = b''_u \alpha_{t''_u}^a$, si l'on montre que $t'_u = t''_u$ on aura automatiquement $b'_{u+1} = b''_{u+1}$.

Par définition, $t'_u = \begin{cases} t'_{u-1} + 1 & \text{si } b'_u \in \bigcup_{k=a}^d (S_{t'_{u-1}}^k \cup C_{t'_{u-1}+1}^k), \\ t'_{u-1} - 1 & \text{si } b'_u \in \bigcup_{k=a}^d (S_{t'_{u-1}-1}^k \cup C_{t'_{u-1}}^k), \end{cases}$

et $t''_u = \begin{cases} t''_{u-1} + 1 & \text{si } b''_u \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t''_{u-1}}^k \cup C_{t''_{u-1}+1}^k), \\ t''_{u-1} - 1 & \text{si } b''_u \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t''_{u-1}-1}^k \cup C_{t''_{u-1}}^k). \end{cases}$

b'_u est donc un brin supprimé ou contracté entre les niveaux a et d , et b''_u est un brin supprimé ou contracté entre les niveaux a et $d - 1$. Comme on suppose $b'_u = b''_u$, alors c'est nécessairement un brin supprimé ou contracté entre les niveaux a et $d - 1$ (et non d).

D'où $b'_u = b''_u \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t'_{u-1}}^k \cup C_{t'_{u-1}+1}^k \cup S_{t'_{u-1}-1}^k \cup C_{t'_{u-1}}^k)$.

Comme on suppose également $t'_{u-1} = t''_{u-1}$ on en déduit alors que $t'_u = t''_u$ et par conséquence $b'_{u+1} = b''_{u+1}$.

Donc pour $1 \leq u \leq \min\{r, q\}$, $b'_u = b''_u$ (et $t'_{u-1} = t''_{u-1}$).

Il reste maintenant à montrer que $r = q$.

Supposons $r < q$ et montrons que ce n'est pas vrai.

Comme b'_r est le dernier brin de $Ch2_{(i,a,d+1)}(b)$, on sait par définition que b'_r est le premier brin du chemin appartenant à B^{d+1} .

Comme on suppose $r < q$, on sait également par définition que $b''_r \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t''_{r-1}}^k \cup C_{t''_{r-1}+1}^k \cup S_{t''_{r-1}-1}^k \cup C_{t''_{r-1}}^k)$.

Comme $B^d \cap \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t''_{r-1}}^k \cup C_{t''_{r-1}+1}^k \cup S_{t''_{r-1}-1}^k \cup C_{t''_{r-1}}^k) = \emptyset$, on a une contradiction avec le fait que $b'_r = b''_r$.

Par conséquent $r \geq q$.

Supposons $q < r$ et montrons que ce n'est pas le cas.

Comme b''_q est le dernier brin de $Ch2_{(i,a,d)}(b)$, on sait par définition que b''_q est un brin de B^d .

Par définition de b''_q on a $b''_q \in \bigcup_{k=a}^d (S_{t''_{q-1}}^k \cup C_{t''_{q-1}+1}^k \cup S_{t''_{q-1}-1}^k \cup C_{t''_{q-1}}^k)$.

Comme $B^d \cap \bigcup_{k=a}^d (S_{t''_{q-1}}^k \cup C_{t''_{q-1}+1}^k \cup S_{t''_{q-1}-1}^k \cup C_{t''_{q-1}}^k) = (S_{t''_{q-1}}^d \cup C_{t''_{q-1}+1}^d \cup S_{t''_{q-1}-1}^d \cup C_{t''_{q-1}}^d)$, si on suppose $b''_q = b'_q$, alors on a

$$b''_q \in (S_{t''_{q-1}}^d \cup C_{t''_{q-1}+1}^d \cup S_{t''_{q-1}-1}^d \cup C_{t''_{q-1}}^d). \quad (4)$$

b''_q est par définition le dernier brin de $Ch2_{(i,a,d)}(b)$. Par hypothèse de récurrence, on suppose que $Ch_{(i,a,d)}(b) = Ch2_{(i,a,d)}(b)$. Donc b''_q est également le dernier brin de $Ch_{(i,a,d)}(b)$. En appliquant la proposition 3 page 15 (puisque $b \in B^d$) on sait alors que la dernière involution effectuée lors du chemin pour arriver à b''_q (nommée jusqu'à maintenant $\alpha_{t'_{q-1}}^a$) est α_i^a . D'autre part en appliquant la proposition 2 page 12 on sait que le dernier brin de $Ch_{(i,a,d)}(b) = Ch2_{(i,a,d)}(b)$ est $b\alpha_i^d$.

Par conséquent l'équation 4 devient $b''_q \in (S_i^d \cup C_{i+1}^d \cup C_i^d \cup S_{i-1}^d)$ et on a $b''_q = b\alpha_i^d$.

Afin de montrer que q n'est pas plus petit que r , nous allons montrer que $b''_q \notin (S_i^d \cup C_{i+1}^d \cup C_i^d \cup S_{i-1}^d)$ (c'est à dire que b''_q ne peut disparaître au niveau d).

- supposons $b''_q \in (S_{i-1}^d \cup C_{i+1}^d)$
 Puisque $b''_q = b\alpha_i^d$, alors b''_q et b appartiennent à la même $(i+1)$ -cellule ainsi qu'à la même $(i-1)$ -cellule. Donc si on suppose $b''_q \in (S_{i-1}^d \cup C_{i+1}^d)$, alors b aussi. Ce qui contredit le fait que par hypothèse $b \in B^{d+1}$.
 Donc $b''_q \notin (S_{i-1}^d \cup C_{i+1}^d)$
- supposons $b''_q \in (S_i^d \cup C_i^d)$
 Puisque $b''_q = b\alpha_i^d$, alors b appartient à la i -cellule adjacente à celle contenant b''_q . Cette i -cellule peut également disparaître au niveau d et dans ce cas on a $b \in (S_i^d \cup C_i^d)$, ou elle peut survivre et dans ce cas on a $b \in BS_i^d$. Or comme précédemment, puisque par hypothèse $b \in B^{d+1}$ alors b ne peut disparaître avant ($b \notin (S_i^d \cup C_i^d)$) et d'autre part nous sommes dans le cas où $b \notin BS_i^d$.
 Donc $b''_q \notin (S_i^d \cup C_i^d)$

Donc $b''_q \notin (S_i^d \cup C_{i+1}^d \cup C_i^d \cup S_{i-1}^d)$. Ce qui contredit l'hypothèse $b''_q = b'q$ avec $q < r$.

Donc q n'est pas plus petit que r et par conséquent $q = r$.

Ceci implique que $Ch2_{(i,a,d+1)}(b) = Ch2_{(i,a,d)}(b)$.

Or par hypothèse de récurrence $Ch_{(i,a,d)}(b) = Ch2_{(i,a,d)}(b)$, et par définition $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = Ch_{(i,a,d)}(b)$ car $b \notin BS_i^d$.

Donc dans le cas $b \notin BS_i^d$, on a $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = Ch2_{(i,a,d+1)}(b)$.

Regardons maintenant le cas où $b \in BS_i^d$.

Nous avons par définition : $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = C = \left(Ch_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d)}(b_p) \right)$,

avec : $b_1 = b$,

$\forall u, 1 \leq u < p, b_{u+1}$ est le dernier brin de $Ch_{(k_u,a,d)}(b_u)$,

$$\forall u, 1 \leq u \leq p, k_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^d, \end{cases}$$

et p est le plus petit entier tel que le dernier brin de C appartienne à BS_i^d .

Or par hypothèse de récurrence (hypothèse $\mathcal{H}_d$ vraie pour tout $i \in N$ et pour tout $b \in B^d$), nous avons : $Ch_{(k_u,a,d)}(b_u) = Ch2_{(k_u,a,d)}(b_u)$, $\forall u, 1 \leq u \leq p$.

Donc pour montrer que $Ch2_{(i,a,d+1)}(b) = Ch_{(i,a,d+1)}(b)$, il suffit de montrer que

$$Ch2_{(i,a,d+1)}(b) = \left(Ch2_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch2_{(k_p,a,d)}(b_p) \right).$$

En utilisant la définition 6, posons :

- $Ch2_{(i,a,d+1)}(b) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_r)$, avec $b'_{u+1} = b'_u \alpha_{t'_u}^a$ pour $0 \leq u < r$,
- $\left(Ch2_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch2_{(k_p,a,d)}(b_p) \right) = (b''_1, b''_2, \dots, b''_q)$, avec $b''_{u+1} = b''_u \alpha_{t''_u}^a$ pour $0 \leq u < q$,
- $Ch2_{(k_u,a,d)}(b_u) = (b_{u,1}^2, b_{u,2}^2, \dots, b_{u,s_u}^2)$, avec $b_{u,v+1}^2 = b_{u,v}^2 \alpha_{t_{u,v}^2}^a$ pour $1 \leq u \leq p$ et $0 \leq v < s_u$.

Montrons tout d'abord par récurrence sur u , $1 \leq u \leq \min\{r, q\}$ que $b'_u = b''_u$ et $t'_{u-1} = t''_{u-1}$.

- pour $u = 1$

Par définition on a $b'_1 = b\alpha_i^a$ et $b''_1 = b_1\alpha_{k_1}^a = b\alpha_i^a$. Par définition on a également $t'_0 = i$ et

$$t_0'' = k_1 = i.$$

Donc $b_1' = b_1''$ et $t_0' = t_0''$.

– supposons $b_u' = b_u''$ et $t_{u-1}' = t_{u-1}''$ pour $1 \leq u < \min\{r, q\}$ et montrons que $b_{u+1}' = b_{u+1}''$ et $t_u' = t_u''$.

Comme $b_{u+1}' = b_u' \alpha_{t_u'}^a$ et $b_{u+1}'' = b_u'' \alpha_{t_u''}^a$, si l'on montre que $t_u' = t_u''$ on aura automatiquement $b_{u+1}' = b_{u+1}''$.

On sait par définition que $b_{u+1}' = b_u' \alpha_{t_u'}^a$ avec

$$\forall u, 1 \leq u < r, t_u' = \begin{cases} t_{u-1}' + 1 & \text{si } b_u' \in \bigcup_{k=a}^d (S_{t_{u-1}'}^k \cup C_{t_{u-1}'+1}^k), \\ t_{u-1}' - 1 & \text{si } b_u' \in \bigcup_{k=a}^d (S_{t_{u-1}'-1}^k \cup C_{t_{u-1}'}^k). \end{cases} \quad (5)$$

Afin de mettre en évidence la relation entre t_u'' et t_{u-1}'' il faut examiner 4 cas :

1. b_{u-1}'', b_u'' et b_{u+1}'' sont dans le même sous-chemin,
2. b_{u-1}' et b_u'' sont dans le même sous-chemin, et b_{u+1}'' est dans le sous-chemin suivant,
3. b_u'' et b_{u+1}'' sont dans le même sous-chemin, et b_{u-1}'' est dans le sous-chemin précédent,
4. b_{u-1}'', b_u'' et b_{u+1}'' sont chacun dans un sous-chemin différent.

Ce qui peut être exprimé de la façon suivante :

1. $\exists l, 1 \leq l \leq p$ tel que b_{u-1}'', b_u'' et $b_{u+1}'' \in Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$;
2. $\exists l, 1 \leq l < p$ tel que $b_{u-1}'', b_u'' \in Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$ et $b_{u+1}'' \in Ch2_{(k_{l+1}, a, d)}(b_{l+1})$;
3. $\exists l, 1 \leq l < p$ tel que $b_{u-1}'' \in Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$ et $b_u'', b_{u+1}'' \in Ch2_{(k_{l+1}, a, d)}(b_{l+1})$;
4. $\exists l, 1 < l < p$ tel que $b_{u-1}'' \in Ch2_{(k_{l-1}, a, d)}(b_l)$, $b_u'' \in Ch2_{(k_l, a, d)}(b_{l+1})$ et $b_{u+1}'' \in Ch2_{(k_{l+1}, a, d)}(b_{l+1})$.

Dans le premier cas, on a :

$\exists v, 1 < v < s_l$, tel que $b_{u-1}'' = b_{l, v-1}^2$, $b_u'' = b_{l, v}^2$, $b_{u+1}'' = b_{l, v+1}^2$, $t_{u-1}'' = t_{l, v-1}^2$ et $t_u'' = t_{l, v}^2$.

Or par définition de $Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$ on a

$$t_{l, v}^2 = \begin{cases} t_{l, v-1}^2 + 1 & \text{si } b_{l, v}^2 \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t_{l, v-1}^2}^k \cup C_{t_{l, v-1}^2+1}^k), \\ t_{l, v-1}^2 - 1 & \text{si } b_{l, v}^2 \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t_{l, v-1}^2-1}^k \cup C_{t_{l, v-1}^2}^k). \end{cases}$$

C'est à dire

$$t_u'' = \begin{cases} t_{u-1}'' + 1 & \text{si } b_u'' \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t_{u-1}''}^k \cup C_{t_{u-1}''+1}^k), \\ t_{u-1}'' - 1 & \text{si } b_u'' \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t_{u-1}''-1}^k \cup C_{t_{u-1}''}^k). \end{cases} \quad (6)$$

Comme $b_u' \in \bigcup_{k=a}^d (S_{t_{u-1}'}^k \cup C_{t_{u-1}'+1}^k \cup C_{t_{u-1}'}^k \cup S_{t_{u-1}-1}^k)$,

$$b_u'' \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t_{u-1}''}^k \cup C_{t_{u-1}''+1}^k \cup C_{t_{u-1}''}^k \cup S_{t_{u-1}-1}^k),$$

$$b_u' = b_u'' \text{ et } t_{u-1}' = t_{u-1}''$$

alors $b_u' = b_u'' \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t_{u-1}'}^k \cup C_{t_{u-1}'+1}^k \cup C_{t_{u-1}'}^k \cup S_{t_{u-1}-1}^k)$, et en utilisant les équations 5 et 6 on obtient $t_u' = t_u''$ et $b_{u+1}' = b_{u+1}''$ dans ce cas.

Dans le deuxième cas, on a :

b_u'' est le dernier brin de $Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$, c'est à dire $b_u'' = b_{l+1}$ puisque par définition le dernier brin de $Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$ est b_{l+1} .

Par hypothèse de récurrence, $Ch_{(k_l, a, d)}(b_l) = Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$, d'où b_{l+1} est également le dernier brin de $Ch_{(k_l, a, d)}(b_l)$ et par définition on a alors $b_{l+1} \in BS_{k_l}^{d-1} \subseteq B^d$.

b_{u+1}'' est le premier brin de $Ch2_{(k_{l+1}, a, d)}(b_{l+1})$, c'est à dire $b_{u+1}'' = b_{l+1} \alpha_{k_{l+1}}^a$.

Nous savons également que $b_u'' = b_{u-1}'' \alpha_{t_{u-1}''}^a$, que $Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$ compte au moins deux brins puisque b_{u-1}'' et b_u'' lui appartiennent.

En utilisant la proposition 2 page 12, de proche en proche on sait que $b_l = b\alpha_{k_1}^d \dots \alpha_{k_{l-1}}^d \in B^d$ et donc d'après la proposition 3 page 15, la dernière involution effectuée lors du parcours de la séquence de brins de $Ch2_{(b_l, a, d)}(k_l)$ est $\alpha_{k_l}^a$.

Donc $t''_{u-1} = k_l$.

Nous avons donc $t''_u = k_{l+1}$ et $t''_{u-1} = k_l$ et $b''_u = b_{l+1}$.

Par définition on a $k_l = \begin{cases} i & \text{si } l \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } l \text{ est pair et } b_l \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } l \text{ est pair et } b_l \in C_i^d, \end{cases}$

et $k_{l+1} = \begin{cases} i & \text{si } l+1 \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } l+1 \text{ est pair et } b_{l+1} \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } l+1 \text{ est pair et } b_{l+1} \in C_i^d. \end{cases}$

D'où, si l est impair ($l+1$ est pair), on a $k_l = i$ et $k_{l+1} = \begin{cases} k_l + 1 & \text{si } b_{l+1} \in S_{k_l}^d, \\ k_l - 1 & \text{si } b_{l+1} \in C_{k_l}^d, \end{cases}$

c'est à dire

$$t''_u = \begin{cases} t''_{u-1} + 1 & \text{si } b''_u \in S_{t''_{u-1}}^d, \\ t''_{u-1} - 1 & \text{si } b''_u \in C_{t''_{u-1}}^d. \end{cases} \quad (7)$$

Or $b'_u = b''_u$ et $t'_{u-1} = t''_{u-1}$ d'où en comparant les équations 5 et 7, $t'_u = t''_u$ et donc $b'_{u+1} = b''_{u+1}$ dans ce cas et si l est impair.

Si l est pair ($l+1$ impair), on a $k_{l+1} = i$ et $k_l = \begin{cases} i+1 & \text{si } b_l \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } b_l \in C_i^d. \end{cases}$

D'où $k_{l+1} = \begin{cases} k_l - 1 & \text{si } b_l \in S_{k_l-1}^d, \\ k_l + 1 & \text{si } b_l \in C_{k_l+1}^d, \end{cases}$

c'est à dire

$$t''_u = \begin{cases} t''_{u-1} - 1 & \text{si } b''_u \in S_{t''_{u-1}-1}^d, \\ t''_{u-1} + 1 & \text{si } b''_u \in C_{t''_{u-1}+1}^d. \end{cases} \quad (8)$$

Or $b'_u = b''_u$ et $t'_{u-1} = t''_{u-1}$ d'où en comparant les équations 5 et 8, $t'_u = t''_u$ et donc $b'_{u+1} = b''_{u+1}$ dans ce cas et si l est pair.

Donc $t'_u = t''_u$ et $b'_{u+1} = b''_{u+1}$ dans ce cas.

Dans le troisième cas, on a :

b''_{u-1} est le dernier brin de $Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$, c'est à dire $b''_{u-1} = b_{l+1}$.

b''_u est le premier brin de $Ch2_{(k_{l+1}, a, d)}(b_{l+1})$, c'est à dire $b''_u = b_{l+1,1}^2 = b_{l+1}\alpha_{t_{l+1,0}^2}$.

Et on a $b''_{u+1} = b_{l+1,1}^2\alpha_{t_{l+1,1}^2}$.

Comme $t_{l+1,1}^2 = \begin{cases} t_{l+1,0}^2 + 1 & \text{si } b_{l+1,1}^2 \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t_{l+1,0}^2}^k \cup C_{t_{l+1,0}^2+1}^k), \\ t_{l+1,0}^2 - 1 & \text{si } b_{l+1,1}^2 \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t_{l+1,0}^2-1}^k \cup C_{t_{l+1,0}^2}^k), \end{cases}$

alors $t''_u = \begin{cases} t''_{u-1} + 1 & \text{si } b''_u \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t''_{u-1}}^k \cup C_{t''_{u-1}+1}^k), \\ t''_{u-1} - 1 & \text{si } b''_u \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t''_{u-1}-1}^k \cup C_{t''_{u-1}}^k). \end{cases}$

Or $b'_u = b''_u$ et $t'_{u-1} = t''_{u-1}$ d'où $t'_u = t''_u$ et donc $b'_{u+1} = b''_{u+1}$ dans ce cas.

Dans le quatrième cas, on a :

b''_{u-1} est le dernier brin de $Ch2_{(k_{l-1}, a, d)}(b_{l-1})$, c'est à dire $b''_{u-1} = b_l$.

b''_u est le dernier brin de $Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$, c'est à dire $b''_u = b_{l+1}$.

b''_u est le premier brin de $Ch2_{(k_l, a, d)}(b_l)$, c'est à dire $b''_u = b_l\alpha_{k_l}^a (= b''_{u-1}\alpha_{t''_{u-1}}^a)$.

b''_{u+1} est le premier brin de $Ch2_{(k_{l+1}, a, d)}(b_{l+1})$, c'est à dire $b''_{u+1} = b_{l+1}\alpha_{k_{l+1}}^a (= b''_u\alpha_{t''_u}^a)$.

Et par définition on a $k_l = \begin{cases} i & \text{si } l \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } l \text{ est pair et } b_l \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } l \text{ est pair et } b_l \in C_i^d, \end{cases}$

$$\text{et } k_{l+1} = \begin{cases} i & \text{si } l+1 \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } l+1 \text{ est pair et } b_{l+1} \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } l+1 \text{ est pair et } b_{l+1} \in C_i^d. \end{cases}$$

D'où, si l est impair ($l+1$ est pair), on a $k_l = i$ et $k_{l+1} = \begin{cases} k_l + 1 & \text{si } b_{l+1} \in S_{k_l}^d, \\ k_l - 1 & \text{si } b_{l+1} \in C_{k_l}^d, \end{cases}$

$$\text{c'est à dire } t_u'' = \begin{cases} t_{u-1}'' + 1 & \text{si } b_u'' \in S_{t_{u-1}''}^d, \\ t_{u-1}'' - 1 & \text{si } b_u'' \in C_{t_{u-1}''}^d. \end{cases}$$

Or $b_u' = b_u''$ et $t_{u-1}' = t_{u-1}''$ d'où $t_u' = t_u''$ et donc $b_{u+1}' = b_{u+1}''$ dans ce cas et si l est impair.

Si l est pair ($l+1$ impair), on a $k_{l+1} = i$ et $k_l = \begin{cases} i+1 & \text{si } b_l \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } b_l \in C_i^d. \end{cases}$

D'où $k_{l+1} = \begin{cases} k_l - 1 & \text{si } b_l \in S_{k_l-1}^d, \\ k_l + 1 & \text{si } b_l \in C_{k_l+1}^d, \end{cases}$

$$\text{c'est à dire } t_u'' = \begin{cases} t_{u-1}'' - 1 & \text{si } b_u'' \in S_{t_{u-1}''-1}^d, \\ t_{u-1}'' + 1 & \text{si } b_u'' \in C_{t_{u-1}''+1}^d. \end{cases}$$

Or $b_u' = b_u''$ et $t_{u-1}' = t_{u-1}''$ d'où $t_u' = t_u''$ et donc $b_{u+1}' = b_{u+1}''$ dans ce cas et si l est pair.

Donc $t_u' = t_u''$ et $b_{u+1}' = b_{u+1}''$ dans ce cas.

Donc pour $1 \leq u \leq \min\{r, q\}$, $b_u' = b_u''$ (et $t_{u-1}' = t_{u-1}''$).

Il reste maintenant à montrer que $r = q$.

Supposons $r < q$ et montrons que l'on aboutit à une contradiction.

Nommons $A = (Ch2_{(k_1, a, d)}(b_1), \dots, Ch2_{(k_p, a, d)}(b_p))$.

b_r'' est un brin de A à l'exception de l'extrémité finale.

Or par hypothèse de récurrence on a $Ch2_{(k_u, a, d)}(b_u) = Ch_{(k_u, a, d)}(b_u)$, $\forall u$, $1 \leq u \leq p$.

D'où : $A = (Ch_{(k_1, a, d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p, a, d)}(b_p))$.

Puisque nous sommes dans le cas où $b \in BS_i^d$, en utilisant la définition 5 page 11, on a $A = Ch_{(i, a, d+1)}(b)$.

D'où b_r'' est au milieu de $Ch_{(i, a, d+1)}(b)$.

En utilisant la définition 5, on sait alors que b_r'' disparaît entre les niveaux a et d .

Comme b_r' est le dernier brin de $Ch2_{(i, a, d+1)}(b)$, par définition $b_r' \in B^{d+1}$.

Puisque qu'un brin disparu entre les niveaux a et d ne peut être survivant au niveau $d+1$, supposer $b_r' = b_r''$ avec $r < q$ aboutit à une contradiction.

Donc $r \geq q$.

Supposons $q < r$ et montrons que l'on aboutit encore à une contradiction.

On a alors $b_q'' = b_q'$ au milieu de $(b_1', b_2', \dots, b_r')$. D'où d'après la définition 6 page 12, b_q' disparaît au plus tard au niveau d .

Par hypothèse de récurrence $Ch2_{(k_u, a, d)}(b_u) = Ch_{(k_u, a, d)}(b_u)$, $\forall u$, $1 \leq u \leq p$, d'où

$$(Ch2_{(k_1, a, d)}(b_1), \dots, Ch2_{(k_p, a, d)}(b_p)) = (Ch_{(k_1, a, d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p, a, d)}(b_p)).$$

Puisque nous sommes dans le cas où $b \in BS_i^d$, en utilisant la définition 5 on a

$$(Ch_{(k_1, a, d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p, a, d)}(b_p)) = Ch_{(i, a, d+1)}(b).$$

donc b_q'' , dernier brin de $(Ch2_{(k_1, a, d)}(b_1), \dots, Ch2_{(k_p, a, d)}(b_p))$ est également le dernier brin de $Ch_{(i, a, d+1)}(b)$. En utilisant de nouveau la définition 5 on a $b_q'' \in BS_i^d$.

D'où supposer $b_r' = b_r''$ avec $q < r$ aboutit à une contradiction. Donc q ne peut être plus petit que r .

Par conséquent $r = q$, ce qui signifie que $Ch2_{(i, a, d+1)}(b) = (Ch2_{(k_1, a, d)}(b_1), \dots, Ch2_{(k_p, a, d)}(b_p))$.

Or par hypothèse de récurrence $Ch_{(k_u, a, d)}(b_u) = Ch2_{(k_u, a, d)}(b_u)$, $\forall u$, $1 \leq u \leq p$.

et par définition $Ch_{(i, a, d+1)}(b) = C = (Ch_{(k_1, a, d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p, a, d)}(b_p))$, car $b \in BS_i^d$.

Donc dans le cas où $b \in BS_i^d$, on a $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = Ch2_{(i,a,d+1)}(b)$.

Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Par conséquent $(\mathcal{H}_d)$ est vraie pour tout d , $a \leq d \leq m$.

Ce qui démontre la proposition. □

A partir de ces deux définitions (def 5 et 6), nous déduisons respectivement de manière directe deux algorithmes (Algorithmes 1 et 2) qui calculent un chemin de connection.

Le premier algorithme est récursif et est basé sur la définition 5. Il prend en entrée la dimension i du chemin, les deux niveaux entre lesquels on veut calculer le chemin, et le brin à partir duquel on veut examiner le chemin. A sa sortie on obtient le chemin de connection sous forme d'une séquence de brins.

On utilise la notation (a, b) pour indiquer la concaténation des deux séquences a et b .

Cet algorithme suit la définition récursive. Il considère tout d'abord le cas particulier $a = d$, puis

Algorithme 1: Construction d'un chemin de connection (suite à la def 5)

Entrée : La dimension i ,
 Les deux niveaux a et d entre lesquels on examine le chemin (avec $0 \leq a \leq d \leq m$),
 Le brin b à partir duquel on examine le chemin.

Sortie : le chemin de connection $Ch_{(i,a,d)}(b)$.

si $a = d$ **alors**
 $\lfloor Ch_{(i,a,d)}(b) = (b\alpha_i^a) ;$

sinon
 $res \leftarrow Ch_{(i,a,d-1)}(b) ;$
 si $b \in BS_i^{d-1}$ **alors**
 tant que le dernier brin de res n'appartient pas à BS_i^{d-1} **faire**
 si dernier brin de $res \in S_i^{d-1}$ **alors**
 $\lfloor res \leftarrow (res, Ch_{(i+1,a,d-1)}(\text{dernier brin de } res)) ;$
 sinon
 $\lfloor res \leftarrow (res, Ch_{(i-1,a,d-1)}(\text{dernier brin de } res)) ;$
 $\lfloor res \leftarrow (res, Ch_{(i,a,d-1)}(\text{dernier brin de } res)) ;$
 $\lfloor Ch_{(i,a,d)}(b) = res ;$

le cas général. Dans le cas général on concatène les chemins tant que l'on n'a pas pour dernier brin un brin survivant.

La complexité de cet algorithme est en $\Theta(d'p)$, p étant le nombre de brins du chemin de connection et d' le nombre de niveaux sur lesquels on observe le chemin (puisque pour chacun des brins du chemin on fera au pire d' appels récursifs).

Le second algorithme est itératif et est basé sur la définition 6. De même que l'algorithme précédent, il prend en entrée la dimension i du chemin, les deux niveaux entre lesquels on veut calculer le chemin, et le brin à partir duquel on veut examiner le chemin. A sa sortie on obtient le chemin de connection sous forme d'une séquence de brins.

Cet algorithme suit la définition itérative. Il considère tout d'abord le cas particulier $a = d$, puis le cas général. Dans le cas général on parcourt le chemin de proche en proche en calculant les involutions permettant de passer de brin en brin en fonction de la manière dont ils ont disparus. Afin de savoir si $brin \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_i^k \cup C_i^k)$ (resp. si $brin \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{inv}^k \cup S_{inv-1}^k \cup C_{inv}^k \cup C_{inv+1}^k)$), on regarde si chaque brin lui correspondant aux niveaux précédents est marqué par S_i ou C_i (resp. S_{inv} , S_{inv-1} , C_{inv} ou C_{inv+1}). On fait alors pour chaque brin au plus $2(d-1-a+1)$ tests (resp.

Algorithme 2: Construction d'un chemin de connection (suite à la def 6)

Entrée : La dimension i ,
Les deux niveaux a et d entre lesquels on examine le chemin (avec $0 \leq a \leq d \leq m$),
Le brin b à partir duquel on examine le chemin.

Sortie : le chemin de connection $Ch_{(i,a,d)}(b)$.

si $a = d$ **alors**
 $Ch_{(i,a,d)}(b) = (b\alpha_i^a)$;

sinon
 $brin \leftarrow b\alpha_i$;
 $res \leftarrow (brin)$;
 si $brin \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_i^k \cup C_i^k)$ **alors**
 $inv \leftarrow i$;
 tant que $brin \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{inv}^k \cup S_{inv-1}^k \cup C_{inv}^k \cup C_{inv+1}^k)$ **faire**
 si $brin \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{inv}^k \cup C_{inv+1}^k)$ **alors**
 $inv \leftarrow inv + 1$;
 sinon
 $inv \leftarrow inv - 1$;
 $brin \leftarrow brin \alpha_{inv}$;
 $res \leftarrow concatenation(res, (brin))$;
 $Ch_{(i,a,d)}(b) = res$;

$4(d-1-a+1)$ tests). La complexité de cet algorithme est donc également en $\Theta(d'p)$, p étant le nombre de brins du chemin de connection et d' le nombre de niveaux sur lesquels on examine le chemin.

Ces deux algorithmes ont même complexité ($\Theta(d'p)$). Toute fois on préférera en pratique utiliser l'algorithme itératif afin d'éviter de surcharger la place mémoire par l'utilisation d'une pile de récursivité.

Étant donné un chemin de connection $Ch_{(i,a,b)}(d)$, on peut déduire deux ensembles de brins : l'ensemble connectant ouvert $Ech_{(i,a,d)}^\circ(b)$ et l'ensemble connectant fermé $Ech_{(i,a,d)}(b)$ (cf. figure 6-b). Intuitivement, le premier ensemble correspond à l'ensemble des brins à l'intérieur du chemin de connection et le second ensemble correspond à l'ensemble des brins du chemin, extrémités incluses. La notion d'orbite généralisée, que nous présenterons plus tard, est basée sur ces deux ensembles.

Définition 7 (Ensembles connectant ouvert et fermé) : Soit $i \in N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Pour chaque brin $b \in B^d$:

- $Ech_{(i,a,d)}^\circ(b)$ est l'ensemble de brins du chemin de connection $Ch_{(i,a,d)}(b)$, excepté le dernier brin ;
 - $Ech_{(i,a,d)}(b) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } Ch_{(i,a,d)}(b) = () \\ Ech_{(i,a,d)}^\circ(b) \cup \{b, b'\} & \text{sinon, où } b' \text{ est le dernier brin de } Ch_{(i,a,d)}(b) \end{cases}$
-
-

4.1.2 Propriétés

Dans cette partie sont exposées et démontrées différentes propriétés des chemins de connection. Parmi celles-ci se trouvent la propriété indiquant que le chemin de connection issu d'un brin correspond brin par brin à l'inverse du chemin de connection issu du dernier brin (du premier chemin); ainsi que la propriété indiquant que sous certaines conditions, deux chemins ne s'intersectent pas. Les autres propriétés sont souvent des étapes intermédiaires pour d'autres propriétés plus importantes.

La première permet de prouver que les chemins de connections sont définis de manière unique. C'est à dire que pour une pyramide donnée, pour une involution α_i , deux niveaux a et d et un brin b donnés il existe un seul $Ch_{(i,a,d)}(b)$.

Proposition 5 : *Pour tout $i \in N$, a, d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^d$, on a :*

1. *la séquence de brins correspondant à $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est unique;*
 2. *et l'ensemble de brins représentant $Ech_{(i,a,d)}(b)$ est unique.*
-

Preuve :

1. soit $i \in N$, a, d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^d$. D'après la définition 6 page 12 nous avons deux cas à examiner : selon si $b \in \bigcup_{k=a}^{d-1} BS_i^k$ ou pas.

Si $b \notin \bigcup_{k=a}^{d-1} BS_i^k$, on a $Ch_{(i,a,d)}(b) = (b\alpha_i^a)$. Par définition de l'involution on sait qu'un unique brin est lié à b par α_i^a . Donc la séquence de brins correspondant à $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est unique dans ce cas.

Si $b \in \bigcup_{k=a}^{d-1} BS_i^k$, on a $Ch_{(i,a,d)}(b) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_r)$ avec :

$$\begin{aligned} b'_0 &= b, t_0 = i, \\ \forall v, 1 \leq v \leq r, b'_v &= b'_{v-1} \alpha_{t'_{v-1}}^a \\ \forall v, 1 \leq v < r, t'_v &= \begin{cases} t'_{v-1} + 1 & \text{si } b'_v \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t'_{v-1}}^k \cup C_{t'_{v-1}+1}^k), \\ t'_{v-1} - 1 & \text{si } b'_v \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t'_{v-1}-1}^k \cup C_{t'_{v-1}}^k), \end{cases} \\ &\text{et } r \text{ est le plus petit entier tel que } b'_r \text{ appartienne à } B^d. \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur j , $1 \leq j \leq r$, que b'_j est déterminé de manière unique.

- pour $j = 1$,
on a $b'_1 = b'_0 \alpha_{t'_0}^a = b\alpha_i^a$. Par définition de l'involution on sait qu'un unique brin est lié à b par α_i^a . Donc b'_1 est unique.
- supposons que b'_j , pour $1 \leq j < r$ est déterminé de manière unique, et montrons que b'_{j+1} aussi.
Par définition on a $b'_{j+1} = b'_j \alpha_{t'_j}^a$. Par définition de l'involution on sait qu'un unique brin est lié à b'_j par $\alpha_{t'_j}^a$. Donc b'_{j+1} est unique.

Donc b'_j est déterminé de manière unique pour tout j , $1 \leq j \leq r$.

Par conséquent, la séquence de brins correspondant à $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est unique dans ce cas.

Et cette démonstration est vraie quelque soit $i \in N$, a, d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^d$.

2. découle du point précédent.

□

Proposition 6 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq d \leq m, \forall b \in B^d$, on a :

tout brin de $Ech_{(i,a,d)}^\circ(b)$ appartient à une cellule supprimée ou contractée entre les niveaux a et d .

c'est à dire :

$$\forall b' \in Ech_{(i,a,d)}^\circ(b), \exists j \in N \text{ et } \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \leq k < d \text{ et } b' \in (S_j^k \cup C_j^k).$$

Preuve : Soit $a \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq m$.

Nous allons montrer par récurrence sur d , que $\forall d, a \leq d \leq niv_b + 1$, l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ suivante est vraie.

$(\mathcal{H}_d) : \forall i \in N, \forall b \in B^a$, tous les brins de $Ech_{(i,a,d)}^\circ(b)$ appartiennent à des cellules supprimées ou contractées entre les niveaux a et d .

– pour $d = a$:

Soit $i \in N$, et $b \in B^a$.

D'après la définition 5 page 11, on a $Ch_{(i,a,a)}(b) = (b\alpha_i^a)$.

On a alors $Ech_{(i,a,a)}^\circ(b) = \emptyset$, et ceci est vrai quelque soit $i \in N$, et $b \in B^a$.

Donc l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_a$ est vraie par vacuité.

– supposons que l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_d$ est vraie pour d tel que $a \leq d < niv_b + 1$, et montrons que l'hypothèse $\mathcal{H}_{d+1}$ est encore vraie.

Soit $i \in N$, et $b \in B^{d+1}$.

Par définition, la décomposition de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ est la suivante :

$$Ch_{(i,a,d+1)}(b) = C = \left(Ch_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d)}(b_p) \right)$$

En appliquant la définition de l'ensemble connectant ouvert (définition 7 page 23), on a :

$$Ech_{(i,a,d+1)}^\circ(b) = Ech_{(k_1,a,d)}^\circ(b_1) \cup \left(\bigcup_{u=2}^p \left(\{b_u\} \cup Ech_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u) \right) \right).$$

$$\text{C'est à dire : } Ech_{(i,a,d+1)}^\circ(b) = \left(\bigcup_{u=1}^p Ech_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u) \right) \cup \left(\bigcup_{u=1}^p \{b_u\} \right).$$

Or on suppose $\mathcal{H}_d$ vraie donc $Ech_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u)$ ne comprend que des brins qui appartiennent à des cellules supprimées ou contractées entre les niveaux a et d pour tout $u, 0 \leq u \leq p$.

Et d'après la proposition 10 page 29, $b_u \in (S_i^d \cup C_i^d)$ pour tout $u, 2 \leq u \leq p$.

Donc $Ech_{(i,a,d+1)}^\circ(b)$ ne comprend que des brins qui appartiennent à des cellules supprimées ou contractées entre les niveaux a et $d+1$.

Et ceci est vrai quelque soit $i \in N$, et $b \in B^{d+1}$.

Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Donc $\forall i \in N, \forall d, a \leq d \leq niv_b + 1$, et $\forall b \in B^d$, tous les brins de $Ech_{(i,a,d)}^\circ(b)$ appartiennent à des cellules supprimées ou contractées entre les niveaux a et d .

Et ceci est vrai quelque soit $a \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq m$.

□

Proposition 7 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}$, vérifiant $0 \leq a < d \leq m, \forall b \in (B^d \cap BS_i^{d-1})$, on a :

$$Ch_{(i,d-1,d)}(b) = (b_2, \dots, b_p, b_{p+1}),$$

et par suite : $Ech_{(i,d-1,d)}(b) \subseteq Ech_{(i,a,d)}(b)$.

Les brins $b_u, 2 \leq u \leq p+1$, étant ceux de la décomposition de $Ch_{(i,a,d)}(b)$ selon la définition 5 page 11, (b_{p+1} est le dernier brin de $Ch_{(i,a,d)}(b)$).

Preuve : D'après la définition 5 page 11,

$$Ch_{(i,a,d)}(b) = (Ch_{(k_1,a,d-1)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d-1)}(b_p)),$$

avec : $b_1 = b$,

$\forall u, 1 \leq u < p, b_{u+1}$ est le dernier brin de $Ch_{(k_u,a,d-1)}(b_u)$,

$$\forall u, 1 \leq u \leq p, k_u = \begin{cases} i \text{ si } u \text{ est impair,} \\ i+1 \text{ si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^{d-1}, \\ i-1 \text{ si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^{d-1}, \end{cases}$$

et p est le plus petit entier tel que le dernier brin du chemin de connection (b_{p+1}) appartienne à BS_i^{d-1} .

De la même manière on a $Ch_{(i,d-1,d)}(b) = (Ch_{(l_1,d-1,d-1)}(b'_1), \dots, Ch_{(l_r,d-1,d-1)}(b'_r))$,

c'est à dire : $Ch_{(i,d-1,d)}(b) = (b'_2, \dots, b'_{r+1})$,

avec : $b'_1 = b$,

$\forall v, 1 \leq v < r, b'_{v+1}$ est le dernier brin de $Ch_{(l_v,d-1,d-1)}(b'_v)$,

$$\forall v, 1 \leq v \leq r, l_v = \begin{cases} i \text{ si } v \text{ est impair,} \\ i+1 \text{ si } v \text{ est pair et } b'_v \in S_i^{d-1}, \\ i-1 \text{ si } v \text{ est pair et } b'_v \in C_i^{d-1}, \end{cases}$$

et r est le plus petit entier tel que le dernier brin du chemin de connection (b'_{r+1}) appartienne à BS_i^{d-1} .

En utilisant la proposition 2 page 12 on a :

$$\forall u, 1 \leq u < p, b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^{d-1}$$

$$\forall v, 1 \leq v < r, b'_{v+1} = b'_v \alpha_{l_v}^{d-1}.$$

Puisque $b_1 = b'_1 = b$, que $k_1 = l_1 = i$ et que étant donné un brin il existe un unique brin lié à lui par une certaine involution, on peut montrer par récurrence sur u que pour tout $u, 1 \leq u \leq \min\{p, r\}$ on a $b_u = b'_u$ et $k_u = l_u$. D'autre part, b_{p+1} et b'_{r+1} sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(i,a,d)}(b)$ et $Ch_{(i,d-1,d)}(b)$. Par définition ce sont donc respectivement les seuls brins de $Ch_{(i,a,d)}(b)$ et $Ch_{(i,d-1,d)}(b)$ appartenant à B^d . Donc on peut montrer par contradiction que nécessairement $r = p$.

Ce qui montre alors que $Ch_{(i,d-1,d)}(b) = (b_2, \dots, b_p, b_{p+1})$.

D'autre part, par définition, un ensemble connectant fermé associé à un chemin contient tous les brins du chemin ainsi que le brin initial. Puisque $Ch_{(i,a,d)}(b) = (Ch_{(k_1,a,d-1)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d-1)}(b_p))$ et $Ch_{(i,d-1,d)}(b) = (b_2, \dots, b_p, b_{p+1})$, alors $\{b_1, b_2, \dots, b_{p+1}\} \subseteq Ech_{(i,a,d)}(b)$ et $Ech_{(i,d-1,d)}(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_{p+1}\}$.

Par conséquent $Ech_{(i,d-1,d)}(b) \subseteq Ech_{(i,a,d)}(b)$.

□

Proposition 8 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}, 0 < a \leq d \leq m, \forall b \in B^d$,
en considérant les décompositions de $Ch_{(i,a,d)}(b)$ et $Ch_{(i,a-1,d)}(b)$ issues de la définition 5 page 11 :

$$\begin{aligned} Ch_{(i,a,d)}(b) &= \left(Ch_{(k_1,a,d-1)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d-1)}(b_p) \right), \\ Ch_{(i,a-1,d)}(b) &= \left(Ch_{(l_1,a-1,d-1)}(b'_1), \dots, Ch_{(l_r,a-1,d-1)}(b'_r) \right), \\ b_{p+1} \text{ (resp. } b'_{r+1}) &\text{ est le dernier brin de } Ch_{(i,a,d)}(b) \text{ (resp. } Ch_{(i,a-1,d)}(b)), \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} b_u &= b'_u, \forall u, 1 \leq u \leq \min\{p+1, r+1\}, \\ r &= p. \end{aligned}$$

Preuve : Montrons par récurrence sur $u, 1 \leq u \leq \min\{p+1, r+1\}$ que l'hypothèse $\mathcal{G}_u$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{G}_u) : b_u = b'_u.$$

- pour $u = 1$,
par construction on a $b_1 = b$ et $b'_1 = b$, donc $b_1 = b'_1$.
Ce qui signifie que $(\mathcal{G}_1)$ est vraie.
- supposons $(\mathcal{G}_u)$ vraie pour $1 \leq u < \min\{p+1, r+1\}$, et montrons que $(\mathcal{G}_{u+1})$ est vraie.
Par définition, pour tout $u, 1 \leq u \leq \min\{p, r\}$, b'_{u+1} et b_{u+1} sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(l_u,a-1,d-1)}(b'_u)$ et $Ch_{(k_u,a,d-1)}(b_u)$. D'où d'après la proposition 2 page 12 on a $b'_{u+1} = b'_u \alpha_{l_u}^{d-1}$ et $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^{d-1}$ pour tout $u, 1 \leq u \leq \min\{p, r\}$.
Par définition on a $k_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^{d-1}, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^{d-1}, \end{cases}$
et $l_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b'_u \in S_i^{d-1}, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b'_u \in C_i^{d-1}, \end{cases}$
pour $1 \leq u \leq \min\{p, r\}$.
Comme $(\mathcal{G}_u)$ est supposée vraie, on a $b'_u = b_u$.
D'où $k_u = l_u$ et par conséquent puisque d'un brin donné (b_u) , et une involution donnée $(\alpha_{k_u}^{d-1})$ on ne peut atteindre qu'un seul brin alors $b'_{u+1} = b_{u+1}$.
Donc $(\mathcal{G}_{u+1})$ est vraie.

Donc $b_u = b'_u$ pour tout $u, 1 \leq u \leq \min\{p+1, r+1\}$.

Montrons que $p = r$.

Si $r < p$, alors b_{r+1} est à l'intérieur de $Ch_{(i,a,d)}(b)$ et donc par définition b_{r+1} n'appartient pas à B^d , il disparaît avant.

Or par construction, b'_{r+1} est le dernier brin de $Ch_{(i,a-1,d)}(b)$. Donc par définition il appartient à B^d .

On a alors une contradiction avec le fait que $b'_{r+1} = b_{r+1}$, donc $r \geq p$.

On montre de manière similaire que r n'est pas strictement plus grand que p .

Donc $r = p$.

□

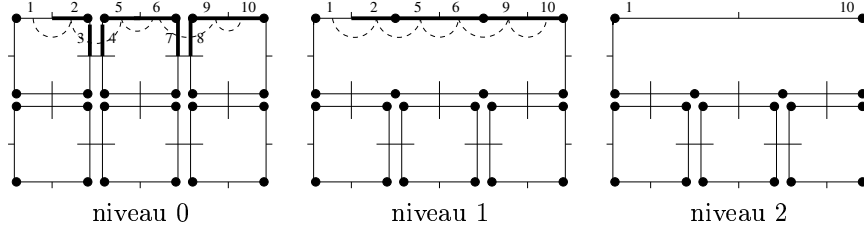


FIG. 8 – Illustration de la proposition 9 page 28. On a $Ch_{(0,0,2)}(1) = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ et $Ch_{(0,1,2)}(1) = (2, 5, 6, 9, 10)$, d'où $Ech_{(0,1,2)}(1) \subseteq Ech_{(0,0,2)}(1)$.

Proposition 9 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}, 0 < a \leq d \leq m, \forall b \in B^d$, on a :

$$Ech_{(i,a,d)}(b) \subseteq Ech_{(i,a-1,d)}(b).$$

Preuve : Soit $a \in \mathbb{N}$ tels que $0 < a \leq m$.

Nous allons montrer par récurrence sur d que $\forall d, a \leq d \leq m$, l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{H}_d) : \forall b \in B^d, \forall i \in N \text{ on a : } Ech_{(i,a,d)}(b) \subseteq Ech_{(i,a-1,d)}(b).$$

– pour $d = a$

Soit $b \in B^a$ et $i \in N$.

D'après la définition du chemin de connection (def 5 page 11), on a $Ch_{(i,a,a)}(b) = (b\alpha_i^a)$.

D'où en appliquant la définition de l'ensemble connectant fermé $Ech_{(i,a,a)}(b)$, on obtient :

$$Ech_{(i,a,a)}(b) = \{b, b\alpha_i^a\}.$$

Puisque $b \in B^a$, nous savons d'après la proposition 2 page 12, que le dernier brin de $Ch_{(i,a-1,a)}$ est $b\alpha_i^a$, et par définition $b \in Ech_{(i,a-1,a)}(b)$. D'où $Ech_{(i,a-1,a)}(b) \supseteq \{b, b\alpha_i^a\}$.

On a alors bien $Ech_{(i,a,a)}(b) \subseteq Ech_{(i,a-1,a)}(b)$.

Et ceci est vrai quelque soit $b \in B^a$ et $i \in N$.

Donc $\mathcal{H}_a$ est vraie.

– supposons $\mathcal{H}_d$ vraie pour $a \leq d < m$ et montrons que $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Soit $b \in B^d$ et $i \in N$.

D'après la définition 5 page 11 nous pouvons écrire les décompositions de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ et $Ch_{(i,a-1,d+1)}(b)$ de la manière suivante :

$$Ch_{(i,a,d+1)}(b) = C = (Ch_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d)}(b_p)),$$

et

$$Ch_{(i,a-1,d+1)}(b) = C' = (Ch_{(l_1,a-1,d)}(b'_1), \dots, Ch_{(l_r,a-1,d)}(b'_r)).$$

En appliquant la proposition 8 page 27 on a alors :

$$Ch_{(i,a,d+1)}(b) = (Ch_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d)}(b_p))$$

$$Ch_{(i,a-1,d+1)}(b) = (Ch_{(k_1,a-1,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a-1,d)}(b_p))$$

Par définition du chemin de connection et de l'ensemble de brins qui le compose, on a :

$$Ech_{(i,a,d+1)}(b) = \bigcup_{u=1}^p Ech_{(k_u,a,d)}(b_u)$$

$$Ech_{(i,a-1,d+1)}(b) = \bigcup_{u=1}^p Ech_{(k_u,a-1,d)}(b_u)$$

Puisque l'on suppose l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ vraie, on a :

$$Ech_{(k_u,a,d)}(b_u) \subseteq Ech_{(k_u,a-1,d)}(b_u), \forall u, 1 \leq u \leq p.$$

Donc $Ech_{(i,a,d+1)}(b) \subseteq Ech_{(i,a-1,d+1)}(b)$.
 Et ceci est vrai quelque soit $b \in B^d$ et $i \in N$.
 Par conséquent $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Donc $\forall b \in B^d, \forall i \in N$, et $\forall d, a \leq d \leq m$ on a :

$$Ech_{(i,a,d)}(b) \subseteq Ech_{(i,a-1,d)}(b).$$

Et toute cette démonstration est vraie quelque soit $a \in \mathbb{N}$ tels que $0 < a \leq m$.

□

Proposition 10 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq d < m, \forall b \in BS_i^d$, et pour tout brin b_u ($2 \leq u \leq p$) tel que $Ch_{(i,a,d+1)}(b) = C = \left(Ch_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d)}(b_p) \right)$ (cf. définition 5 page 11) on a

$$b_u \in (S_i^d \cup C_i^d) \subseteq B^d, \\ \text{et le dernier brin de } Ch_{(i,a,d+1)}(b) \in BS_i^d \subseteq B^d.$$

Preuve : Soit $i \in N, a, d \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq a \leq d < m$, et soit $b \in BS_i^d$.

Nous allons montrer par récurrence sur u , que $\forall u, 2 \leq u \leq p$, l'hypothèse $\mathcal{H}_u$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{H}_u) : b_u \in (S_i^d \cup C_i^d)$$

– pour $u = 2$

Par construction, b_2 est le dernier brin de $Ch_{(k_1,a,d)}(b_1)$.

Or $b_1 = b \in B^d$ et $k_1 = i$. En utilisant la proposition 2 page 12, on obtient alors $b_2 = b\alpha_i^d$.

Comme $b \in BS_i^d$, alors $b_2 \in (S_i^d \cup C_i^d) \subseteq B^d$.

Donc $\mathcal{H}_2$ est vraie.

– supposons $\mathcal{H}_u$ avec $2 \leq u < p$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{u+1}$ est vraie.

Par construction, b_{u+1} est le dernier brin de $Ch_{(k_u,a,d)}(b_u)$. Or $b_u \in B^d$. En utilisant la proposition 2 page 12, on obtient alors $b_{u+1} = b_u\alpha_{k_u}^d$.

Comme $b_u \in (S_i^d \cup C_i^d)$, alors $b_{u+1} \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

Or par définition, seul le dernier brin de C peut appartenir à BS_i^d , et b_{u+1} n'est pas supposé ici être le dernier brin.

Donc $b_{u+1} \in (S_i^d \cup C_i^d) \subseteq B^d$.

Donc $\mathcal{H}_{u+1}$ est vraie.

Donc $\forall u, 2 \leq u \leq p, b_u \in (S_i^d \cup C_i^d) \subseteq B^d$.

De plus, par construction, on sait que le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ appartient à BS_i^d .

On a donc $Ch_{(i,a,d+1)}(b) \in B^d$.

Et tout ce que l'on a montrer est vrai quelque soit $i \in N, a, d \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq a \leq d < m$, et $b \in BS_i^d$.

□

Proposition 11 : $\forall i_1, i_2 \in N,$

$\forall a, d \in \mathbb{N},$ tels que $0 \leq a \leq d \leq m,$

$\forall b, b' \in B^d,$ tels que si $i_1 = i_2 :$ $\begin{cases} b' \notin \{b, \text{ le dernier brin de } Ch_{(i_1, a, d)}(b)\} \\ b \notin \{b', \text{ le dernier brin de } Ch_{(i_2, a, d)}(b')\} \end{cases}.$

Alors $\{b_0, b_1, \dots, b_p\} \cap \{b'_0, b'_1, \dots, b'_r\} = \emptyset.$

Les brins $b_u, 1 \leq u \leq p,$ et $b'_v, 1 \leq v \leq r$ étant respectivement ceux de la décomposition de $Ch_{(i_1, a, d)}(b)$ et $Ch_{(i_2, a, d)}(b')$ selon la définition 5 page 11 :

$$\begin{aligned} Ch_{(i_1, a, d)}(b) &= \left(Ch_{(k_0, a, d-1)}(b_0), \dots, Ch_{(k_p, a, d-1)}(b_p) \right), \\ Ch_{(i_2, a, d)}(b') &= \left(Ch_{(l_0, a, d-1)}(b'_0), \dots, Ch_{(l_r, a, d-1)}(b'_r) \right), \end{aligned}$$

avec p et r pouvant être égaux à 0.

Preuve : Nous allons tout d'abord montrer par récurrence sur u que si $i_1 = i_2 = i$ alors $\forall u, 1 \leq u \leq p,$ l'hypothèse $\mathcal{G}_u$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{G}_u) : b_u \notin \{b'_1, \dots, b'_r\}.$$

– pour $u = 1$

Supposons qu'il existe $v, 1 \leq v \leq r$ tel que $b_1 = b'_v.$

Par construction, b_1, b'_v (si v est impair) et b'_{v+1} (si v est pair) sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(i, a, d-1)}(b_0), Ch_{(i, a, d-1)}(b'_{v-1})$ et $Ch_{(i, a, d-1)}(b'_v).$ Puisque $b_0 = b, b'_{v-1}$ et b'_v appartiennent à B^{d-1} (proposition 10 page 29), en appliquant la proposition 2 page 12, on a : $b_1 = b_0 \alpha_i^{d-1}, b'_v = b'_{v-1} \alpha_i^{d-1}$ (pour v impair) et $b'_{v+1} = b'_v \alpha_i^{d-1}$ (pour v pair).

D'où dire que $b_1 = b'_v$ est équivalent à dire que $b_0 = b'_{v-1}$ (si v est impair) ou $b_0 = b'_{v+1}$ (si v est pair).

Ce qui contredit le fait que $b_0 = b \notin Ech_{(i_2, a, d)}^\circ(b')$ car b'_{v+1} et b'_{v-1} sont deux brins de $Ech_{(i_2, a, d)}^\circ.$

Donc $\forall v, 1 \leq v \leq r, b_1 \neq b'_v,$ c'est à dire que $\mathcal{G}_1$ est vraie.

– supposons $\mathcal{G}_u$ vraie pour $1 \leq u < p$ et montrons que $\mathcal{G}_{u+1}$ est vraie.

Supposons qu'il existe $v, 1 \leq v \leq r$ tel que $b_{u+1} = b'_v.$

Si $u+1$ est impair et v pair, par construction, b_{u+1}, b'_{v+1} sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(i, a, d-1)}(b_u)$ et $Ch_{(i, a, d-1)}(b'_v).$ Puisque b_u et b'_v appartiennent à B^{d-1} (proposition 10 page 29), en appliquant la proposition 2 page 12, on a : $b_{u+1} = b_u \alpha_i^{d-1}$ et $b'_{v+1} = b'_v \alpha_i^{d-1}.$

D'où dire que $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u = b'_{v+1}.$

C'est à dire que $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u \in \{b'_2, \dots, b'_{r+1}\}.$

Or d'après l'hypothèse $\mathcal{G}_u$ que l'on suppose vraie $b_u \notin \{b'_2, \dots, b'_r\}.$

Donc $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u = b'_{r+1}.$

Par définition, b'_{r+1} appartient à BS_i^{d-1} et on sait que $b_u \in (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1}),$ donc $b_u \neq b'_{r+1}.$

Donc supposer que $b_{u+1} = b'_v$ aboutit à une contradiction dans ce cas.

Donc $\forall v, 1 \leq v \leq r,$ si $u+1$ est impair et v pair alors $b_{u+1} \neq b'_v.$

Si $u+1$ est impair et v impair, par construction, b_{u+1}, b'_v sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(i, a, d-1)}(b_u)$ et $Ch_{(i, a, d-1)}(b'_{v-1}).$ Puisque b_u et b'_{v-1} appartiennent à B^{d-1} (proposition 10 page 29), en appliquant la proposition 2 page 12, on a : $b_{u+1} = b_u \alpha_i^{d-1}$ et $b'_v = b'_{v-1} \alpha_i^{d-1}.$

D'où dire que $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u = b'_{v-1}.$

C'est à dire que $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u \in \{b'_0, \dots, b'_{r-1}\}$.
Or d'après l'hypothèse $\mathcal{G}_u$ que l'on suppose vraie $b_u \notin \{b'_1, \dots, b'_{r-1}\}$.
Et on a nécessairement $b'_0 \neq b_u$ car $b'_0 \in B^d$ et $b_u \in (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$.
Donc supposer que $b_{u+1} = b'_v$ aboutit à une contradiction dans ce cas.
Donc $\forall v, 1 \leq v \leq r$, si $u+1$ est impair et v impair alors $b_{u+1} \neq b'_v$.

Si $u+1$ est pair et v pair, par construction, b_{u+1}, b'_v sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(k_u, a, d-1)}(b_u)$ et $Ch_{(l_{v-1}, a, d-1)}(b'_{v-1})$ et on a $k_u, l_{v-1} \in \{i+1, i-1\}$.

En appliquant la proposition 2 page 12, on a : $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^d$ et $b'_v = b'_{v-1} \alpha_{l_{v-1}}^d$.

Puisque b_{u+1} et b'_v appartiennent à $(S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$ (proposition 10 page 29), et que par α_{i-1}^{d-1} et α_{i-1}^{d-1} on reste dans la même i -cellule, on a alors : si b_{u+1} et $b'_v \in S_i^{d-1}$ (resp. $\in C_i^{d-1}$) alors b_u et b'_{v-1} aussi et donc par conséquent (en utilisant la définition) on a $k_u = l_{v-1}$.

Puisque $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^{d-1}, b'_v = b'_{v-1} \alpha_{l_{v-1}}^{d-1}$ et $k_u = l_{v-1}$, dire que $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u = b'_{v-1}$.

C'est à dire que $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u \in \{b'_0, \dots, b'_{r-1}\}$.

Et on montre encore de la même manière que précédemment que l'on a une contradiction.

Donc $\forall v, 1 \leq v \leq r$, si $u+1$ est pair et v pair alors $b_{u+1} \neq b'_v$.

Si $u+1$ est pair et v impair, par construction, b_{u+1}, b'_{v+1} sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(k_u, a, d-1)}(b_u)$ et $Ch_{(l_v, a, d-1)}(b'_v)$ et on a $k_u, l_v \in \{i+1, i-1\}$.

En appliquant la proposition 2 page 12, on a : $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^d$ et $b'_{v+1} = b'_v \alpha_{l_v}^d$.

Puisque b_{u+1} et b'_v (proposition 10 page 29) appartiennent à $(S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$, et que par α_{i-1}^{d-1} et α_{i-1}^{d-1} on reste dans la même i -cellule, on a alors : si b_{u+1} et $b'_v \in S_i^{d-1}$ (resp. $\in C_i^{d-1}$) alors b_u aussi et donc par conséquent (en utilisant la définition) on a $k_u = l_v$.

Puisque $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^{d-1}$ et $b'_{v+1} = b'_v \alpha_{l_v}^{d-1}$ et $k_u = l_v$, dire que $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u = b'_{v+1}$.

C'est à dire que $b_{u+1} = b'_v$ est équivalent à dire que $b_u \in \{b'_2, \dots, b'_{r+1}\}$.

Et on montre encore de la même manière que précédemment que l'on a une contradiction.

Donc $\forall v, 1 \leq v \leq r$, si $u+1$ est pair et v impair alors $b_{u+1} \neq b'_v$.

Donc $\mathcal{G}_{u+1}$ est vraie.

Donc $\forall u, 1 \leq u \leq p, b_u \notin \{b'_1, \dots, b'_r\}$.

Pour pouvoir conclure il reste à montrer que si $i_1 \neq i_2$ on a également la même propriété à savoir :

$$b_u \notin \{b'_1, b'_2, \dots, b'_r\} \quad \forall u, 1 \leq u \leq p.$$

En utilisant la proposition 10 page 29, on sait que :

$$\{b_1, \dots, b_p\} \subseteq (S_{i_1}^{d-1} \cup C_{i_1}^{d-1}) \text{ et que } \{b'_1, \dots, b'_r\} \subseteq (S_{i_2}^{d-1} \cup C_{i_2}^{d-1}).$$

$$\text{Or par définition } (S_{i_1}^{d-1} \cup C_{i_1}^{d-1}) \cap (S_{i_2}^{d-1} \cup C_{i_2}^{d-1}) = \emptyset.$$

$$\text{Donc } \{b_1, \dots, b_p\} \cap \{b'_1, \dots, b'_r\} = \emptyset.$$

C'est à dire que si $i_1 \neq i_2$ on a $b_u \notin \{b'_1, \dots, b'_r\}, \forall u, 1 \leq u \leq p$.

Donc quelque soit $i_1, i_2 \in N$ on a $\{b_0, b_1, \dots, b_p\} \cap \{b'_0, b'_1, \dots, b'_r\} = \emptyset$.

□

Une propriété importante des chemins de connection est qu'ils (ou plus précisément les ensembles connectants ouverts correspondants) ne s'intersectent pas.

Proposition 12 : $\forall i_1, i_2 \in N,$

$\forall a, d \in \mathbb{N},$ tels que $0 \leq a \leq d \leq m,$

$\forall b, b' \in B^d,$ tels que si $i_1 = i_2 :$ $\begin{cases} b' \notin \{b, \text{ le dernier brin de } Ch_{(i_1, a, d)}(b)\} \\ b \notin \{b', \text{ le dernier brin de } Ch_{(i_2, a, d)}(b')\} \end{cases} .$

Alors $Ech_{(i_1, a, d)}^\circ(b) \cap Ech_{(i_2, a, d)}^\circ(b') = \emptyset.$

Preuve : Soit $a \in \mathbb{N},$ tels que $0 \leq a \leq m.$

Nous allons montrer par récurrence sur $d, a \leq d \leq m,$ que l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ suivante est vraie.

$(\mathcal{H}_d) : \forall i_1, i_2 \in N, \forall b, b' \in B^d,$ tels que si $i_1 = i_2 :$ $\begin{cases} b' \notin \{b, \text{ le dernier brin de } Ch_{(i_1, a, d)}(b)\}, \\ b \notin \{b', \text{ le dernier brin de } Ch_{(i_2, a, d)}(b')\}, \end{cases}$
on a :

$$Ech_{(i_1, a, d)}^\circ(b) \cap Ech_{(i_2, a, d)}^\circ(b') = \emptyset .$$

– pour $d = a$

Soit $i_1, i_2 \in N,$

Soit $b, b' \in B^a$ vérifiant les hypothèses de $(\mathcal{H}_a).$

On a par la définition 5 page 11, $Ch_{(i_1, a, a)}(b) = (b\alpha_{i_1}^a)$ et $Ch_{(i_2, a, a)}(b') = (b'\alpha_{i_2}^a).$

D'où $Ech_{(i_1, a, a)}^\circ(b) = Ech_{(i_2, a, a)}^\circ(b') = \emptyset.$

Donc $Ech_{(i_1, a, a)}^\circ(b) \cap Ech_{(i_2, a, a)}^\circ(b') = \emptyset .$

Et ceci est vrai quelque soit $i_1, i_2 \in N, b, b' \in B^a$ vérifiant les hypothèses de $(\mathcal{H}_a).$

Donc $\mathcal{H}_a$ est vraie.

– supposons $\mathcal{H}_d$ vraie pour $a \leq d < m,$ et montrons que $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Soit $i_1, i_2 \in N.$

Soit $b, b' \in B^{d+1}$ vérifiant les hypothèses de $(\mathcal{H}_{d+1}).$

D'après la définition 5 page 11 on a : $Ch_{(i_1, a, d+1)}(b) = (Ch_{(k_0, a, d)}(b_0), \dots, Ch_{(k_p, a, d)}(b_p))$

et $Ch_{(i_2, a, d+1)}(b') = (Ch_{(l_0, a, d)}(b'_0), \dots, Ch_{(l_r, a, d)}(b'_r))$ avec p et r pouvant être égaux à 0.

Notons également b_{p+1} le dernier brin de $Ch_{(k_p, a, d)}(b_p)$ et b'_{r+1} le dernier brin de $Ch_{(l_r, a, d)}(b'_r).$

D'après la définition 7 page 23, on a alors

$$Ech_{(i_1, a, d+1)}^\circ(b) = \left(\bigcup_{u=0}^p Ech_{(k_u, a, d)}^\circ(b_u) \right) \cup \left(\bigcup_{u=1}^p \{b_u\} \right)$$

$$\text{et } Ech_{(i_2, a, d+1)}^\circ(b') = \left(\bigcup_{v=0}^r Ech_{(l_v, a, d)}^\circ(b'_v) \right) \cup \left(\bigcup_{v=1}^r \{b'_v\} \right).$$

Donc pour montrer que $Ech_{(i_1, a, d+1)}^\circ(b) \cap Ech_{(i_2, a, d+1)}^\circ(b') = \emptyset$ il suffit de montrer :

$$\begin{cases} b_u \neq b'_v & \forall u, 1 \leq u \leq p \quad \forall v, 1 \leq v \leq r \\ Ech_{(k_u, a, d)}^\circ(b_u) \cap Ech_{(l_v, a, d)}^\circ(b'_v) = \emptyset & \forall u, 0 \leq u \leq p \quad \forall v, 0 \leq v \leq r \\ b_u \notin Ech_{(l_v, a, d)}^\circ(b'_v) & \forall u, 1 \leq u \leq p \quad \forall v, 0 \leq v \leq r \\ b'_v \notin Ech_{(k_u, a, d)}^\circ(b_u) & \forall u, 0 \leq u \leq p \quad \forall v, 1 \leq v \leq r \end{cases} \quad (9)$$

Pour montrer le premier point de (9) il suffit de vérifier que les hypothèses sont vérifiées au rang d pour pouvoir appliquer $\mathcal{H}_d$ que l'on suppose vraie.

Donc on peut remplacer ce premier point par les hypothèses qui doivent être vérifiées.

$$\left\{ \begin{array}{l} b_u \neq b'_v \quad \forall u, 1 \leq u \leq p \quad \forall v, 1 \leq v \leq r \\ \forall u, 0 \leq u \leq p \\ \forall v, 0 \leq v \leq r \end{array} \right\} \text{ si } k_u = l_v \quad b_u \neq b'_v \quad b_u \neq b'_{v+1} \quad b_{u+1} \neq b'_v \quad (10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_u \notin Ech_{(l_v, a, d)}^\circ(b'_v) \quad \forall u, 1 \leq u \leq p \quad \forall v, 0 \leq v \leq r \\ b'_v \notin Ech_{(k_u, a, d)}^\circ(b_u) \quad \forall u, 0 \leq u \leq p \quad \forall v, 1 \leq v \leq r \end{array} \right.$$

Or d'après la proposition 10 page 29 on a $b_u \in (S_{i_1}^d \cup C_{i_1}^d) \forall u, 1 \leq u \leq p$ et $b'_v \in (S_{i_2}^d \cup C_{i_2}^d) \forall v, 1 \leq v \leq r$.

Et d'après la proposition 6 page 25 on sait que les brins de $Ech_{(k_u, a, d)}^\circ(b_u)$ ainsi que ceux de $Ech_{(l_v, a, d)}^\circ(b'_v)$ appartiennent à des cellules supprimées ou contractées entre les niveaux a et d . Par conséquent ils ne peuvent appartenir à des cellules supprimées ou contractées au niveau d .

Donc $b_u \notin Ech_{(l_v, a, d)}^\circ(b'_v), \forall u, 1 \leq u \leq p, \forall v, 0 \leq v \leq r$,

et $b'_v \notin Ech_{(k_u, a, d)}^\circ(b_u), \forall u, 0 \leq u \leq p, \forall v, 1 \leq v \leq r$.

Par suite, les deux derniers points de (10) sont vérifiés.

Donc pour montrer (10) il reste à montrer que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & b_u \neq b'_v \\ \forall u, 0 \leq u \leq p & \forall v, 0 \leq v \leq r & \text{si } k_u = l_v \quad b_u \neq b'_v \\ \forall u, 1 \leq u \leq p+1 & \forall v, 0 \leq v \leq r & \text{si } k_{u-1} = l_v \quad b_u \neq b'_v \\ \forall u, 0 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r+1 & \text{si } k_u = l_{v-1} \quad b_u \neq b'_v \end{array} \right. \quad (11)$$

En décomposant les 4 inéquations de façon à observer u et v selon les intervalles $1 \leq u \leq p$ et $1 \leq v \leq r$ et les cas $u = 0, v = 0, u = p$ et $v = r$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & b_u \neq b'_v \\ & \text{si } k_0 = l_0 & b_0 \neq b'_0 \\ \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & \text{si } k_0 = l_v \quad b_0 \neq b'_v \\ & \text{si } k_u = l_0 & b_u \neq b'_0 \\ & \text{si } k_p = l_0 & b_{p+1} \neq b'_0 \\ \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & \text{si } k_{u-1} = l_0 \quad b_u \neq b'_0 \\ & \text{si } k_p = l_v & b_{p+1} \neq b'_v \\ & \text{si } k_0 = l_r & b_0 \neq b'_{r+1} \\ \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & \text{si } k_0 = l_{v-1} \quad b_0 \neq b'_v \\ & \text{si } k_u = l_r & b_u \neq b'_{r+1} \end{array} \right. \quad (12)$$

D'après la proposition 6 page 25 on sait que les brins de $Ech_{(i_1, a, d+1)}^\circ(b)$ ainsi que ceux de $Ech_{(i_2, a, d+1)}^\circ(b')$ appartiennent à des cellules supprimées ou contractées entre les niveaux a et $d+1$. Par conséquent ils ne peuvent appartenir à B^{d+1} .

Or b_0 et $b'_0 \in B^{d+1}$, d'où

– $b_0 \neq b'_v, \forall v, 1 \leq v \leq r$,

– $b'_0 \neq b_u, \forall u, 1 \leq u \leq p$.

D'après les hypothèses si $i_1 = i_2$, on a : $b_0 \neq b'_0, b_0 \neq b'_{r+1}$ et $b'_0 \neq b_{p+1}$. C'est à dire :

– si $k_0 = l_0 : b_0 \neq b'_0$,

– si $k_0 = l_r$ et r pair (c'est à dire si $l_r = i_2$) : $b_0 \neq b'_{r+1}$,

– si $k_p = l_0$ et p pair (c'est à dire si $k_p = i_1$) : $b'_0 \neq b_{p+1}$.

D'où en utilisant ceci on démontre en partie les points de (12).

Il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & b_u \neq b'_v \\ & \text{si } k_p = l_0 \text{ et } k_p \neq i_1 & b_{p+1} \neq b'_0 \\ & \text{si } k_p = l_v & b_{p+1} \neq b'_v \\ & \text{si } k_0 = l_r \text{ et } l_r \neq i_2 & b_0 \neq b'_{r+1} \\ \forall u, 1 \leq u \leq p & \text{si } k_u = l_r & b_u \neq b'_{r+1} \end{array} \right. \quad (13)$$

En ce qui concerne le premier point de (13), on sait d'après la proposition 11 que $\{b_1, \dots, b_p\} \cap \{b'_0, \dots, b'_r\} = \emptyset$. Donc le premier point est bien vérifié.

En ce qui concerne le deuxième point de (13), puisque l'on suppose $l_0 = k_p$ et $i_1 \neq k_p$ il n'y a qu'un seul cas à examiner : celui où $p+1$ est pair.

Par construction, b_{p+1}, b'_1 sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(i_2, a, d)}(b_p)$ et $Ch_{(i_2, a, d)}(b'_0)$.

Donc en appliquant la proposition 2 page 12, on a $b_{p+1} = b_p \alpha_{i_2}^d$ et $b'_1 = b'_0 \alpha_{i_2}^d$.

D'où dire que $b_{p+1} = b'_0$ est équivalent à dire que $b_p = b'_1$.

Or d'après ce que l'on a montré précédemment on a $b'_1 \notin \{b_1, \dots, b_p\}$.

Donc on a une contradiction.

Par conséquent si $l_0 = k_p$ et $i_1 \neq k_p$, $b_{p+1} \neq b'_0$.

Donc le deuxième point de (13) est vrai.

En ce qui concerne le troisième point de (13), soit v , $1 \leq v \leq r$.

Par construction, b'_{v+1}, b_{p+1} sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(l_v, a, d)}(b'_v)$ et $Ch_{(k_p, a, d)}(b_p)$.

En appliquant la proposition 2 page 12, on a $b_{p+1} = b_p \alpha_{k_p}^d$ et $b'_{v+1} = b'_v \alpha_{l_v}^d$.

Or on suppose $k_p = l_v$, d'où dire que $b'_v = b_{p+1}$ est équivalent à dire que $b'_{v+1} = b_p$.

C'est à dire que $b'_v = b_{p+1}$ est équivalent à dire que $b_p \in \{b'_2, \dots, b'_{r+1}\}$.

Et on montre encore de la même manière que précédemment que l'on a une contradiction.

Donc pour tout v , $1 \leq v \leq r$, si $l_v = k_p$ alors $b'_v \neq b_{p+1}$.

Donc le troisième point de (13) est vrai.

En ce qui concerne le quatrième point de (13), puisque l'on suppose $k_0 = l_r$ et $i_2 \neq l_r$ il n'y a qu'un seul cas à examiner : celui où $r+1$ est pair.

Par construction, b'_{r+1}, b_1 sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(i_1, a, d)}(b'_r)$ et $Ch_{(i_1, a, d)}(b_0)$.

Donc on a $b'_{r+1} = b'_r \alpha_{i_1}^d$ et $b_1 = b_0 \alpha_{i_1}^d$.

D'où dire que $b'_{r+1} = b_0$ est équivalent à dire que $b'_r = b_1$.

Or d'après ce que l'on a montré précédemment on a $b_1 \notin \{b'_1, \dots, b'_r\}$.

Donc on a une contradiction.

Par conséquent si $k_0 = l_r$ et $i_2 \neq l_r$, $b'_{r+1} \neq b_0$.

Donc le quatrième point de (13) est vrai.

En ce qui concerne le dernier point de (13), soit u , $1 \leq u \leq p$.

Par construction, b_{u+1}, b'_{r+1} sont respectivement les derniers brins de $Ch_{(k_u, a, d)}(b_u)$ et $Ch_{(l_r, a, d)}(b'_r)$.

En appliquant la proposition 2 page 12, on a $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^d$ et $b'_{r+1} = b'_r \alpha_{l_r}^d$.

Or on suppose $k_u = l_r$ d'où dire que $b_u = b'_{r+1}$ est équivalent à dire que $b_{u+1} = b'_r$.

C'est à dire que $b_u = b'_{r+1}$ est équivalent à dire que $b'_r \in \{b_2, \dots, b_{p+1}\}$.

Et on montre encore de la même manière que précédemment que l'on a une contradiction.

Donc pour tout u , $1 \leq u \leq p$, si $l_r = k_u$ alors $b_u \neq b'_{r+1}$.

Donc le dernier point de (13) est vrai.

Donc nous avons montré que tous les points nécessaires et suffisants pour montrer que

$$Ech_{(i_1, a, d+1)}^\circ(b) \cap Ech_{(i_2, a, d+1)}^\circ(b') = \emptyset$$

sont bien vérifiés.

Donc $Ech_{(i_1, a, d+1)}^\circ(b) \cap Ech_{(i_2, a, d+1)}^\circ(b') = \emptyset$.

Et ceci est vrai quelque soit $i_1, i_2 \in N$, $b, b' \in B^{d+1}$, tels que

si $i_1 = i_2$: $\begin{cases} b' \notin \{b, \text{ le dernier brin de } Ch_{(i_1, a, d+1)}(b)\} \\ b \notin \{b', \text{ le dernier brin de } Ch_{(i_2, a, d+1)}(b')\} \end{cases}$
Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Donc $\mathcal{H}_d$ est vraie pour tout d , $a \leq d \leq m$.

Or toute cette démonstration est vraie quelque soit $a \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq a \leq m$.

Par conséquent la proposition est donc vraie.

□

La proposition suivante souligne le fait que la séquence de brins disparus et reliant b et $b' = b\alpha_i^d$ est l'inverse de la séquence des brins disparus entre $b' = b\alpha_i^d$ et b .

Proposition 13 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq d \leq m, \forall b \in B^d$, on a :

1. $(b, Ch_{(i, a, d)}(b)) = \text{inverse_séquence}((b', Ch_{(i, a, d)}(b')))$;

2. $Ech_{(i, a, d)}(b) = Ech_{(i, a, d)}(b')$;

avec b' le dernier brin de $Ch_{(i, a, d)}(b)$.

Preuve :

1. Soit $a \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq a \leq m$.

Nous allons montrer par récurrence sur d , que $\forall d, a \leq d \leq m$, l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ suivante est vraie.

$(\mathcal{H}_d) : \forall b \in B^d, \forall i \in N$,

$$(b, Ch_{(i, a, d)}(b)) = \text{inverse_séquence}((b', Ch_{(i, a, d)}(b')))$$

avec b' le dernier brin de $Ch_{(i, a, d)}(b)$.

– pour $d = a$,

Soit $i \in N$, $b \in B^a$ et b' le dernier brin de $Ch_{(i, a, a)}(b)$.

Nous savons par définition (def 5 page 11) que $Ch_{(i, a, a)}(b) = (b\alpha_i^a)$.

D'où $b' = b\alpha_i^a \in B^a$.

Toujours par définition, nous avons alors $Ch_{(i, a, a)}(b') = (b'\alpha_i^a)$.

Or α_i^a est une involution d'où $Ch_{(i, a, a)}(b') = (b)$.

On a alors $(b, Ch_{(i, a, a)}(b)) = (b, b')$ et $(b', Ch_{(i, a, a)}(b')) = (b', b)$.

Donc $(b, Ch_{(i, a, a)}(b)) = \text{inverse_séquence}((b', Ch_{(i, a, a)}(b')))$.

Et ceci est vrai quelque soit $i \in N$ et $b \in B^a$.

Donc l'hypothèse $\mathcal{H}_a$ est vraie.

– supposons que $\mathcal{H}_d$ est vraie pour $a \leq d < m$, et montrons que $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Soit $i \in N$, $b \in B^{d+1}$ et b' le dernier brin de $Ch_{(i, a, d+1)}(b)$.

D'après la définition 5 page 11, nous devons examiner deux cas : celui où $b \notin BS_i^d$ et celui où $b \in BS_i^d$.

– si $b \notin BS_i^d$ on a :

$$Ch_{(i, a, d+1)}(b) = Ch_{(i, a, d)}(b) \tag{14}$$

Puisque b' est le dernier brin de $Ch_{(i, a, d+1)}(b)$, on a également b' dernier brin de $Ch_{(i, a, d)}(b)$.

D'après la proposition 2 page 12 on a $b' = b\alpha_i^{d+1}$ et $b' = b\alpha_i^d$.

Comme $b \in B^{d+1}$ on a $b' \in B^{d+1}$.

Montrons par contradiction que l'on a $b' \notin BS_i^d$.

Supposons $b' \in BS_i^d$. On a alors $b'\alpha_i^d \in (S_i^d \cup C_i^d)$.

Or $b = b'\alpha_i^d$ et on a supposé $b \in B^{d+1}$ ce qui entraîne $b \notin (S_i^d \cup C_i^d)$.

Donc $b' \notin BS_i^d$.

Par définition (def 5 page 11), on a alors

$$Ch_{(i,a,d+1)}(b') = Ch_{(i,a,d)}(b') \quad (15)$$

Or on suppose l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ vraie, c'est à dire

$$(b, Ch_{(i,a,d)}(b)) = \text{inverse_séquence} \left((b', Ch_{(i,a,d)}(b')) \right) \quad (16)$$

En utilisant les équations (14), (15) et (16), on obtient

$$(b, Ch_{(i,a,d+1)}(b)) = \text{inverse_séquence} \left((b', Ch_{(i,a,d+1)}(b')) \right).$$

Et ceci pour tout $i \in N$ et $b \in (B^{d+1} - BS_i^d)$.

Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie dans ce cas.

– si $b \in BS_i^d$:

Par définition, la décomposition de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ est de la forme :

$$Ch_{(i,a,d+1)}(b) = C = \left(Ch_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, Ch_{(k_p,a,d)}(b_p) \right).$$

Comme b' est le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$, on a par définition $b' \in BS_i^d$.

Par définition, la décomposition de $Ch_{(i,a,d+1)}(b')$ est alors de la forme :

$$Ch_{(i,a,d+1)}(b') = C' = \left(Ch_{(l_1,a,d)}(b'_1), \dots, Ch_{(l_r,a,d)}(b'_r) \right).$$

Dans la suite, quitte à échanger p et r , nous allons supposer que $p \leq r$.

Pour montrer que $(b, Ch_{(i,a,d+1)}(b)) = \text{inverse_séquence} \left((b', Ch_{(i,a,d+1)}(b')) \right)$, il faut montrer que pour tout u , $1 \leq u \leq p$ on a

$$(b_u, Ch_{(k_u,a,d)}(b_u)) = \text{inverse_séquence} \left((b'_{r+1-u}, Ch_{(l_{r+1-u},a,d)}(b'_{r+1-u})) \right), \text{ et que } r = p.$$

Pour pouvoir utiliser $(\mathcal{H}_d)$ que l'on suppose vraie, il faut que ces hypothèses soient vérifiées. Donc il faut montrer que

$$\begin{cases} k_u = l_{r-u+1} \in N, \quad \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ b'_{r-u+1} = \text{dernier brin de } Ch_{(k_u,a,d)}(b_u), \quad \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ b_u \in B^d, \quad \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ r = p. \end{cases}$$

Or $b_u \in B^d$, $k_u \in N$ et $b_{u+1} = \text{dernier brin de } Ch_{(k_u,a,d)}(b_u)$, $\forall u, 1 \leq u \leq p$, par définition de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$.

Il reste donc à montrer que :

$$\begin{cases} k_u = l_{r-u+1}, \quad \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ b'_{r-u+1} = b_{u+1}, \quad \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ r = p. \end{cases}$$

Nous nommons dans toute la démonstration b_{p+1} et b'_{r+1} les derniers brins respectifs de $Ch_{(k_p,a,d)}(b_p)$ et $Ch_{(l_r,a,d)}(b'_r)$.

Dans un premier temps, nous allons montrer par récurrence sur u , $0 \leq u \leq p$, que l'hypothèse $\mathcal{G}_u$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{G}_u) : b_{u+1} = b'_{r+1-u}$$

– pour $u = 0$:

On a posé b'_{r+1} comme étant le dernier brin de $Ch_{(l_r,a,d)}(b'_r)$. Puisque $Ch_{(l_r,a,d)}(b'_r)$

est le dernier sous-chemin composant $Ch_{(i,a,d+1)}(b')$, alors b'_{r+1} est aussi le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b')$.

Par définition, b' est le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$. Puisque $b \in B^{d+1}$, en appliquant la proposition 2 page 12, on obtient $b' = b\alpha_i^{d+1}$ et par suite on en déduit que $b' \in B^{d+1}$ aussi.

Comme nous avons vu que b'_{r+1} est le dernier brin de $Ch_{(i,a,d+1)}(b')$ et que $b' \in B^{d+1}$, en utilisant la proposition 2, on obtient $b'_{r+1} = b'\alpha_i^{d+1}$.

D'où $b'_{r+1} = b\alpha_i^{d+1}\alpha_i^{d+1}$ et donc $b'_{r+1} = b$ (puisque α_i^{d+1} est une involution).

Or par définition on a $b_1 = b$.

Par conséquent $b'_{r+1} = b_1$ et $(\mathcal{G}_0)$ est vraie.

– supposons $\mathcal{G}_u$ pour $0 \leq u < p$ vraie et montrons que $\mathcal{G}_{u+1}$ est encore vraie.

On veut donc montrer que $b_{u+2} = b'_{r-u}$.

Par construction on sait que :

$$\begin{aligned} b_{u+2} &\text{ est le dernier brin de } Ch_{(k_{u+1},a,d)}(b_{u+1}), \\ \text{et } b'_{r-u+1} &\text{ est le dernier brin de } Ch_{(l_{r-u},a,d)}(b'_{r-u}). \end{aligned}$$

D'après la proposition 10 page 29 on sait que b_{u+2} et b'_{r-u+1} sont des brins de B^d , d'où en utilisant la proposition 2 page 12

$$\begin{aligned} b_{u+2} &= b_{u+1}\alpha_{k_{u+1}}^d, \\ \text{et } b'_{r-u+1} &= b'_{r-u}\alpha_{l_{r-u}}^d. \end{aligned}$$

C'est à dire

$$b_{u+2} = b_{u+1}\alpha_{k_{u+1}}^d \quad \text{et} \quad b'_{r-u} = b'_{r-u+1}\alpha_{l_{r-u}}^d. \quad (17)$$

Puisque l'on suppose $\mathcal{G}_u$ vraie, on sait que $b_{u+1} = b'_{r-u+1}$.

Donc pour montrer que $b_{u+2} = b'_{r-u}$, il suffit de montrer que $k_{u+1} = l_{r-u}$.

On peut remarquer que $r+1 = (r-u) + (u+1)$. Or comme démontré lors de la preuve de la proposition 2 page 12, r est nécessairement impair, donc $r+1$ est pair et par suite $r-u$ et $u+1$ ont même parité.

$$\begin{aligned} \text{Par définition on a } k_{u+1} &= \begin{cases} i & \text{si } u+1 \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u+1 \text{ est pair et } b_{u+1} \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } u+1 \text{ est pair et } b_{u+1} \in C_i^d, \end{cases} \\ \text{et } l_{r-u} &= \begin{cases} i & \text{si } r-u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } r-u \text{ est pair et } b'_{r-u} \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } r-u \text{ est pair et } b'_{r-u} \in C_i^d. \end{cases} \end{aligned}$$

– Si $r-u$ et $u+1$ sont impairs alors $k_{u+1} = i$ et $l_{r-u} = i$.

Donc dans ce cas $k_{u+1} = l_{r-u}$.

– Si $r-u$ et $u+1$ sont pairs alors on a k_{u+1} (resp. l_{r-u}) $\in \{i-1, i+1\}$ selon si b_{u+1} (resp. b'_{r-u}) appartient à C_i^d ou S_i^d .

Supposons $b'_{r-u} \in S_i^d$, alors $l_{r-u} = i+1$. Puisque par α_{i+1} on reste dans la même i -cellule, alors $b'_{r-u+1} = b'_{r-u}\alpha_{l_{r-u}}^d \in S_i^d$. Or $b'_{r-u+1} = b_{u+1}$, d'où $b_{u+1} \in S_i^d$. Et donc $k_{u+1} = i+1$ également. C'est à dire si $r-u$ et $u+1$ sont pairs et $b'_{r-u} \in S_i^d$ alors $l_{r-u} = k_{u+1}$.

On montre de la même manière que si $b'_{r-u} \in C_i^d$, alors $b'_{r-u+1} = b_{u+1}$ aussi, et l_{r-u} ainsi que k_{u+1} valent $i-1$. D'où si $r-u$ et $u+1$ sont pairs et $b'_{r-u} \in C_i^d$ alors $l_{r-u} = k_{u+1}$.

Donc dans tous les cas $k_{u+1} = l_{r-u}$.

Et en utilisant les relations 17, ainsi que l'hypothèse $(\mathcal{G}_u)$, on en déduit que $b_{u+2} = b'_{r-u}$, c'est à dire que $(\mathcal{G}_{u+1})$ est vraie.

Donc pour tout u , $0 \leq u \leq p$, $\mathcal{G}_u$ est vraie i.e. $b_{u+1} = b'_{r+1-u}$.

Reste à montrer que $p = r$.

Montrons le par contradiction en supposant que $p < r$.

b_{p+1} est par construction le dernier brin de $Ch_{(k_p,a,d)}(b_p)$, donc le dernier brin de

$Ch_{(i,a,d+1)}(b)$. Par définition on a alors $b_{p+1} \in B^{d+1}$.

b'_{r+1-p} est un brin strictement à l'intérieur du chemin $Ch_{(i,a,d+1)}(b')$ et donc c'est un brin qui nécessairement disparaît entre les niveaux a et d puisque par définition seules les extrémités du chemin appartiennent à B^{d+1} .

On obtient alors une contradiction avec le fait que $b_{p+1} = b'_{r+1-p}$.

Donc p n'est pas strictement inférieur à r .

Et par conséquent $p = r$.

Puisque l'on a montré que

$$\begin{cases} k_u = l_{r-u+1} \in N, \quad \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ b'_{r-u+1} = \text{dernier brin de } Ch_{(k_u,a,d)}(b_u), \quad \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ b_u \in B^d, \quad \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ r = p, \end{cases}$$

en utilisant $(\mathcal{H}_d)$ que l'on suppose vraie, i.e. : $\forall b \in B^d, \forall i \in N$,

$$(b, Ch_{(i,a,d)}(b)) = \text{inverse_séquence} \left((b', Ch_{(i,a,d)}(b')) \right)$$

avec b' le dernier brin de $Ch_{(i,a,d)}(b)$,

on déduit alors que pour tout $u, 1 \leq u \leq p$ on a $r = p$ et que

$$(b_u, Ch_{(k_u,a,d)}(b_u)) = \text{inverse_séquence} \left((b'_{r+1-u}, Ch_{(l_{r+1-u},a,d)}(b'_{r+1-u})) \right).$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$(b, Ch_{(i,a,d+1)}(b)) = \text{inverse_séquence} \left((b', Ch_{(i,a,d+1)}(b')) \right).$$

Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie pour tout $b \in B^{d+1}$.

Donc $\forall b \in B^d, \forall i \in N$, et $\forall d, a \leq d \leq m$,

$$(b, Ch_{(i,a,d)}(b)) = \text{inverse_séquence} \left((b', Ch_{(i,a,d)}(b')) \right),$$

avec b' est le dernier brin de $Ch_{(i,a,d)}(b)$.

Et toute cette démonstration est vraie quelque soit $a \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq a \leq m$.

2. découle du point précédent.

□

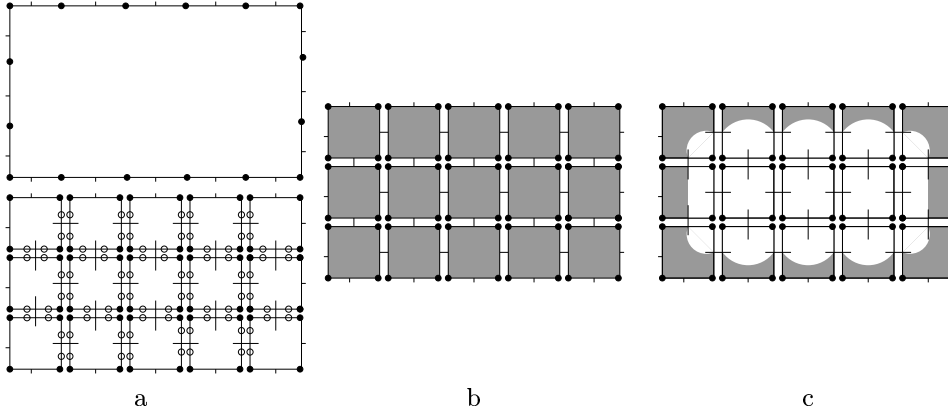


FIG. 9 – Illustration de la question : "pourquoi étendre les chemins de connection". (a) : une pyramide à deux niveaux, le deuxième niveau ayant été obtenu après 22 1-suppressions (modélisées par des cercles). (b) : ce que l'on voudrait obtenir, à savoir l'ensemble des faces représentant l'unique région du deuxième niveau de la pyramide. (c) : l'orbite généralisée que l'on obtiendrait en n'utilisant que des chemins de connection partant d'un brin survivant.

4.2 Chemins de connection étendus

Comme nous l'avons dit précédemment nous cherchons à savoir quels sont les brins d'un certain niveau $a \geq 0$ de la pyramide qui correspondent à une certaine orbite d'un niveau supérieur ($a \leq d \leq m$).

Pour cela nous avons introduit la notion de chemin de connection $Ch_{(i,a,d)}(b)$ définie pour $b \in B^d$. Comme nous le verrons dans la section 5, l'idée est de définir les orbites généralisées uniquement à l'aide des chemins de connection. Le principe de la construction d'une orbite généralisée est de lui ajouter tous les brins que l'on peut atteindre en effectuant des chemins de connection à partir de brins lui appartenant déjà.

Comme nous pouvons voir figure 4.2 en utilisant la notion de chemin de connection définie précédemment, c'est à dire en se limitant aux chemins de connections partant brins survivants, on ne peut pas obtenir ce que l'on veut. C'est pourquoi nous allons étendre cette notion pour des brins quelconques de la pyramide ($b \in B^a$) et non pas seulement des brins de B^d (pour $Ch_{(i,a,d)}(b)$). Dans cette section nous allons dans un premier temps définir la notion de chemin de connection étendu puis nous en donnerons quelques propriétés.

4.2.1 Définitions

Dans le cas standard (pour les brins survivants), la définition de chemin de connection étendu correspond à celle du chemin de connection défini dans la sous-section précédente et donc aussi à celle de Brun et Kropatsch. Pour tous les autres brins de la pyramide (les brins non survivants), cette définition est étendue afin de pouvoir définir les orbites généralisées. Un chemin de connection étendu est une séquence de brins d'un niveau inférieur qui sépare deux brins d'un niveau supérieur. De la même manière qu'un chemin de connection, intuitivement, un chemin de connection étendu à un niveau donné peut être obtenu en concaténant des chemins de connections du niveau précédent concernés par des suppressions ou des contractions de cellules.

Notons $ChE_{(i,a,d)}(b)$ le chemin de connection étendu entre les niveaux a et d ($a \leq d$), pour tout brin $b \in B^a$ et dimension i .

Lorsque $b \in B^d$ (un brin survivant), $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est la séquence de brins du niveau a séparant le brin b et son voisin $b\alpha_i^d$. Nous avons donc $ChE_{(i,a,d)}(b) = Ch_{(i,a,d)}(b)$ dans ce cas.

C'est lorsque $b \notin B^d$ (un brin non survivant), que nous allons étendre la notion de chemin de connection.

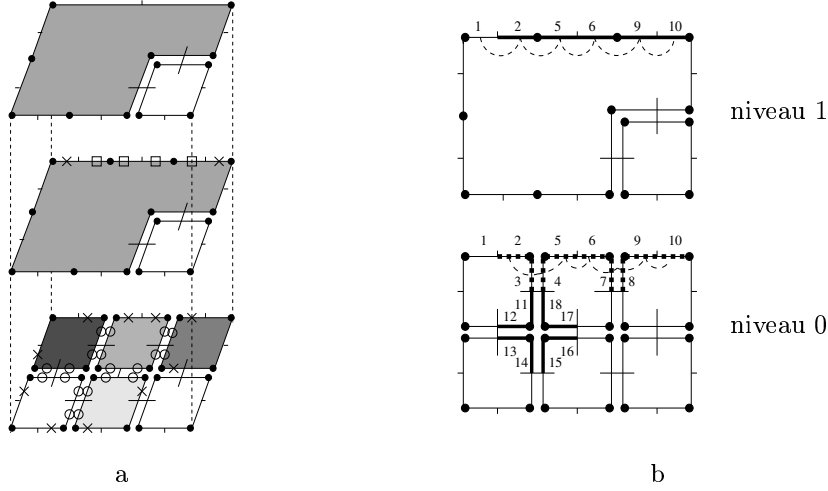


FIG. 10 – (a) Exemple d'une pyramide de 2-G-cartes composée de trois niveaux. Les brins 0-supprimés (resp. 1-supprimés) sont marqués par des carrés vides (resp. des cercles). (b) Deux niveaux de la pyramide. Les brins du chemin de connection étendu $ChE_{(0,1,2)}(1)$ sont dessinés en gras dans le niveau 1. Ces brins sont entre les brins 1 et 10, où $10 = 1\alpha_0^2$: $ChE_{(0,1,2)}(1) = (2, 5, 6, 9, 10) = (1\alpha_0^1, 1\alpha_0^1\alpha_1^1, 1\alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_0^1, 1\alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_0^1\alpha_1^1, 1\alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_0^1\alpha_1^1\alpha_0^1)$. $EchE_{(0,1,2)}^\circ(1) = \{2, 5, 6, 9\}$, et $EchE_{(0,1,2)}(1) = \{1, 2, 5, 6, 9, 10\}$. Les brins du chemin de connection étendu $ChE_{(0,0,2)}(1)$ sont dessinés en pointillés dans le niveau 0, et $ChE_{(0,0,2)}(1) = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$. $ChE_{(0,0,2)}(1)$ est la concaténation de $ChE_{(0,0,1)}(1)$, $ChE_{(1,0,1)}(2)$, $ChE_{(0,0,1)}(5)$, $ChE_{(1,0,1)}(6)$ et $ChE_{(0,0,1)}(9)$. Notons que $ChE_{(0,0,1)}(5) = ChE_{(0,0,0)}(5) = (6)$. Les brins 5 et 11 sont des brins non survivants au niveau 2 : $ChE_{(0,0,2)}(5) = (6, 7, 8, 9, 10)$ est une sous-séquence de $ChE_{(0,0,2)}(1)$, et $ChE_{(1,0,1)}(11) = (12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 11)$ est un cycle.

Lorsque $b \in B^{d-1}$, la suppression ou la contraction de la cellule contenant b est directement concernée dans la construction du niveau d et a des conséquences directes sur la définition des nouvelles orbites de ce niveau. Ce qui n'est pas le cas lorsque $b \notin B^{d-1}$. Pour ces raisons, si $b \notin B^{d-1}$, $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est défini comme la séquence vide, et si $b \in B^{d-1}$, $ChE_{(i,a,d)}(b)$ correspond à la séquence de brins traversée à partir de b et en appliquant les mêmes règles que pour la définition de la suppression et contraction de cellule. Il y a ici deux conditions d'arrêt : quand le dernier brin b' appartient à B^d , ou quand le dernier brin est b (Dans le premier cas, $ChE_{(i,a,d)}(b)$ correspond à une sous-séquence ou à l'inverse d'une sous-séquence de $ChE_{(i,a,d)}(b')$. Dans le second cas, $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est un cycle).

Voir figures 10 et 11 pour des exemples de ces différents cas de chemins de connection étendus. La notion de chemin de connection étendu peut être formellement définie de la manière suivante.

Définition 8 (Chemin de connection étendu (version récursive)) : Soit $i \in N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Pour chaque brin $b \in B^a$, $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est défini par :

- si $niv_b \geq d$: $ChE_{(i,a,d)}(b) = Ch_{(i,a,d)}(b)$,
- si $niv_b < d - 1$: $ChE_{(i,a,d)}(b) = ()$,
- sinon : $niv_b = d - 1$ et
 - si $b \notin (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$: $ChE_{(i,a,d)}(b) = ChE_{(i,a,d-1)}(b)$,
 - sinon ($b \in (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$) :

$$ChE_{(i,a,d)}(b) = C = \left(ChE_{(k_1,a,d-1)}(b_1), ChE_{(k_2,a,d-1)}(b_2), \dots, ChE_{(k_p,a,d-1)}(b_p) \right),$$

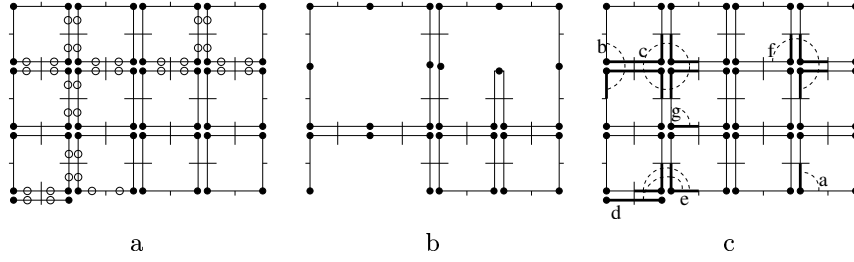


FIG. 11 – Exemple de différents cas de chemins de connection étendus. (a) et (b) représentent respectivement les niveaux 0 et 1 d'une pyramide, (b) étant obtenu à partir de (a) par 10 1-suppressions. (c) sont représentés les chemins $ChE_{(1,0,1)}$ issus des brins a, b, c, d, e, f et g .

avec : $b_1 = b$,
 $\forall u, 1 \leq u < p, b_{u+1}$ est le dernier brin de $ChE_{(k_u, a, d-1)}(b_u)$,
 $\forall u, 1 \leq u \leq p, k_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^{d-1}, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^{d-1}, \end{cases}$
et p est le plus petit entier tel que le dernier brin de C soit b , ou appartienne à BS_i^{d-1} .

La définition 8 définit donc la notion de chemin de connection étendu de manière récursive. Une autre manière de définir cette notion est de le faire itérativement.

La démarche est alors la même que celle expliquée page 11 en prenant cette fois comme conditions d'arrêt : le dernier brin parcouru appartient à B^d , ou est b .

Nous obtenons ainsi la définition itérative suivante :

Définition 9 (Chemin de connection étendu (version itérative)) : Soit $i \in N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Pour chaque brin $b \in B^a$, $ChE2_{(i,a,d)}(b)$ est défini par :

si $b \in B^d$ (i.e $niv_b \geq d$) : $ChE2_{(i,a,d)}(b) = Ch_{(i,a,d)}(b)$,

sinon si $niv_b < d-1$: $ChE2_{(i,a,d)}(b) = ()$,

sinon (i.e $niv_b = d-1$) si $b \notin (\bigcup_{k=a}^{d-2} BS_i^k \cup S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$: $ChE2_{(i,a,d)}(b) = (b\alpha_i^a)$,

sinon : $ChE2_{(i,a,d)}(b) = (b'_1, b'_2, \dots, b'_r)$, avec

$$b'_0 = b, t_0 = i,$$

$$\forall v, 1 \leq v \leq r, b'_v = b'_{v-1} \alpha_{t'_{v-1}}^a$$

$$\forall v, 1 \leq v < r, t'_v = \begin{cases} t'_{v-1} + 1 & \text{si } b'_v \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t'_{v-1}}^k \cup C_{t'_{v-1}+1}^k), \\ t'_{v-1} - 1 & \text{si } b'_v \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{t'_{v-1}-1}^k \cup C_{t'_{v-1}}^k), \end{cases}$$

et r est le plus petit entier tel que

$$b'_r = b \text{ ou } \begin{cases} \text{si } b \in (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1}) : b'_r \text{ appartient à } B^d, \\ \text{si } b \in (S_j^{d-1} \cup C_j^{d-1}) \text{ avec } j \neq i : b'_r \text{ appartient à } B^{d-1}. \end{cases}$$

Nous allons prouver que ces deux définitions sont équivalentes. Mais pour cela nous allons commencer par prouver une propriété des chemins de connection étendus définis selon la première définition qui nous sera utile par la suite.

Proposition 14 : $\forall i \in N, \forall a, d$ tels que $0 \leq a \leq d \leq m, \forall b \in B^{d-1}$ si $a < d$ ou $\forall b \in B^a$ si $d = a$, on a :

1. si $b \in B^{d-1} - (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$ pour $a < d$ ou si $b \in B^a$ pour $d = a$, la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a .
 2. si $b \in (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$,
 - soit le dernier brin de $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est b ,
 - soit le dernier brin est différent de b et la dernière involution effectuée lors du parcours de la séquence correspondant à $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a .
-

Preuve :

Soit $a \in N$ tel que $0 \leq a \leq m$.

Nous allons montrer par récurrence sur $d, a \leq d \leq m$, que l'hypothèse suivante est vraie :

$(\mathcal{H}_d) : \forall b \in B^{d-1}$ pour $a < d$, ou $\forall b \in B^a$ pour $d = a$, on a :

1. si $b \in B^{d-1} - (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$ pour $a < d$, ou $b \in B^a$ pour $d = a$ la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a .
2. si $b \in (S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$,
 - soit le dernier brin de $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est b ,
 - soit le dernier brin est différent de b et la dernière involution effectuée lors du parcours de la séquence correspondant à $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a .

– pour $d = a$

On a par définition $ChE_{(i,a,d)}(b) = Ch_{(i,a,d)}(b)$. et par la proposition 3 page 15 on sait que la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence $Ch_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a . Donc la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a .

Par conséquent $\mathcal{H}_a$ est vraie.

– supposons $\mathcal{H}_d$ vraie pour $a \leq d < m$ et montrons que $\mathcal{H}_{d+1}$ est également vraie.

Soit $i \in N$ et $b \in B^d$.

Nous allons examiner trois cas : $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, $b \in BS_i^d$ et $b \in (S_i^d \cup C_i^d)$.

Lorsque $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, nous avons par définition (8 page 40), $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ChE_{(i,a,d)}(b)$.

Or nous supposons $\mathcal{H}_d$ vraie, c'est à dire la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est α_i^a car $b \in B^d$.

Donc lorsque $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $ChE_{(i,a,d+1)}(b)$ est α_i^a .

Lorsque $b \in BS_i^d$, on a $b \in B^{d+1}$ d'où $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = Ch_{(i,a,d+1)}(b)$. Et d'après la proposition 3 page 15 on sait que la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence $Ch_{(i,a,d+1)}(b)$ est α_i^a .

Donc lorsque $b \in BS_i^d$, la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence $ChE_{(i,a,d+1)}(b)$ est α_i^a .

Lorsque $b \in (S_i^d \cup C_i^d)$, nous avons par définition (8 page 40),

$$ChE_{(i,a,d+1)}(b) = \left(ChE_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE_{(k_p,a,d)}(b_p) \right),$$

avec : $b_1 = b$,

$\forall u, 1 \leq u < p, b_{u+1}$ est le dernier brin de $ChE_{(k_u, a, d)}(b_u)$,

$$\forall u, 1 \leq u \leq p, k_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^d, \end{cases}$$

et p est le plus petit entier tel que le dernier brin (b_{p+1}) du chemin soit b , ou appartienne à BS_i^d .

Puisque pour tout $u, 1 \leq u \leq p, b_u \in (S_i^d \cup C_i^d)$ alors $ChE_{(k_u, a, d)}(b_u) = Ch_{(k_u, a, d)}(b_u)$.

On a $b \in B^d$, et b_{u+1} = dernier brin de $ChE_{(k_u, a, d)}(b_u)$ (= dernier brin de $Ch_{(k_u, a, d)}(b_u)$) d'où en utilisant la proposition 2 page 12, on peut montrer par récurrence que $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^d \in B^d$ pour $1 \leq u \leq p$. On en déduit alors que $b_{p+1} = b \alpha_{k_1}^d \alpha_{k_2}^d \dots \alpha_{k_p}^d$.

Par récurrence on peut montrer que pour $1 < 2u < p+1$

- si $b_{2u-1} \in (S_i^d \cup C_i^d)$ alors $b_{2u} \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$ car $b_{2u} = b_{2u-1} \alpha_{k_{2u-1}}^d, k_{2u-1} = i$ et que par α_i on change de i -cellule, on passe à la i -cellule voisine qui peut elle-même être i -supprimée i -contractée ou survivante ;
- si $b_{2u} \in (S_i^d \cup C_i^d)$ alors $b_{2u+1} \in (S_i^d \cup C_i^d)$ car $b_{2u+1} = b_{2u} \alpha_{k_{2u}}^d, k_{2u} = i+1$ ou $k_{2u} = i-1$, et que par α_{i+1} ou α_{i-1} on reste dans la même i -cellule.

Par suite :

- si p est pair alors nécessairement $b_{p+1} = b$: car par définition on a $b_p \in (S_i^d \cup C_i^d)$, $k_p \in \{i-1, i+1\}$ et par α_{i+1} ou α_{i-1} on reste dans la même i -cellule, d'où $b_{p+1} \in (S_i^d \cup C_i^d)$. Or par définition $b_{p+1} = b$ ou $b_{p+1} \in BS_i^d$. Comme $b_{p+1} \in (S_i^d \cup C_i^d)$ alors $b_{p+1} = b$;
- si p est impair alors on a deux cas : soit $b_{p+1} \in (S_i^d \cup C_i^d)$, soit $b_{p+1} \in BS_i^d$. Dans le premier cas on a nécessairement $b_{p+1} = b$. Dans le deuxième cas, nécessairement $b_{p+1} \neq b$ et $k_p = i$.

Par définition on sait que le dernier brin (resp. la dernière involution) de $ChE_{(i, a, d+1)}(b)$ est également celui (resp. celle) de $ChE_{(k_p, a, d)}(b_p)$.

Puisque l'on suppose l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ vraie, on sait que la dernière involution effectuée lors du parcours des brins de la séquence représentant le chemin $ChE_{(k_p, a, d)}(b_p)$ est $\alpha_{k_p}^a$ car $b_p \in B^d$.

Donc lorsque $b \in (S_i^d \cup C_i^d)$, soit le dernier brin de $ChE_{(i, a, d)}(b)$ est b , soit le dernier brin est différent de b et la dernière involution effectuée lors du parcours de la séquence correspondant à $ChE_{(i, a, d)}(b)$ est α_i^a .

Et tout ceci est vrai quelque soit $i \in N$ et $b \in B^d$.

Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Donc $\mathcal{H}_d$ est vraie quelque soit $d, a \leq d \leq m$. Et toute cette démonstration est vraie quelque soit $a \in N$.

□

Proposition 15 : Les deux définitions du chemin de connection étendu sont équivalentes. i.e. pour $i \in N, a, d$ tels que $0 \leq a \leq d \leq m$ et $b \in B^a$, nous avons : $ChE_{(i, a, d)}(b) = ChE2_{(i, a, d)}(b)$.

Preuve :

Soit a, d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Montrons par récurrence sur $d, a \leq d \leq m$, l'hypothèse $(\mathcal{H}_d)$ suivante :

$$(\mathcal{H}_d) : \forall b \in B^a, \forall i \in N, ChE_{(i, a, d)}(b) = ChE2_{(i, a, d)}(b).$$

pour $d=a$:

Par définition on a $ChE_{(i, a, a)}(b) = Ch_{(i, a, a)}(b)$ et $ChE2_{(i, a, a)}(b) = Ch_{(i, a, a)}(b)$.

Donc $\mathcal{H}_a$ est vraie.

supposons $\mathcal{H}_d$ vraie pour $a \leq d < m$ et montrons qu'elle est encore vraie pour $d + 1$.

Soit $i \in N$ et $b \in B^a$.

Par définition on a $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ()$ et $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = ()$ si $d + 1 > niv_b + 1$.

D'où $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie si $d + 1 > niv_b + 1$.

Supposons maintenant $d + 1 \leq niv_b + 1$, c'est à dire $b \in B^d - B^{d+1}$ ou $b \in B^{d+1}$.

L'ensemble des brins i -contractés, i -supprimés ou survivants voisins d'une i -suppression ou i -contraction $(BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$ est un sous ensemble de B^d . Tout brin de B^d appartient où pas à ce sous-ensemble.

D'où afin de montrer que $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d+1)}(b)$, nous allons examiner pour $b \in B^d$ deux cas : $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$ et $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

Regardons dans un premier temps le cas où $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

Nous avons par définition $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ChE_{(i,a,d)}(b)$.

Or par hypothèse de récurrence $ChE_{(i,a,d)}(b) = ChE2_{(i,a,d)}(b)$.

Donc pour montrer que $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d+1)}(b)$, il faut montrer que $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d)}(b)$.

Lorsque $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, on a alors deux cas : soit $b \in B^{d+1}$ et n'est pas voisin d'une i -cellule supprimée ou contractée, soit $b \in B^d$ appartient à une j -cellule supprimée ou contractée (avec $j \neq i$). C'est à dire : soit $b \in B^{d+1} - BS_i^d$, soit $b \in B^d \cap (S_j^d \cup C_j^d)$ avec $j \neq i$.

Si $b \in B^{d+1} - BS_i^d$ on a par définition 9 page 41 :

– $ChE2(i, a, d + 1)(b) = Ch(i, a, d + 1)(b)$ car $b \in B^{d+1}$,

– $ChE2(i, a, d)(b) = Ch(i, a, d)(b)$ car $b \in B^d$.

Et d'après la définition 5 page 11, puisque $b \in B^{d+1} - BS_i^d$ alors $Ch(i, a, d + 1)(b) = Ch(i, a, d)(b)$.

Donc si $b \in B^{d+1} - BS_i^d$ on a $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d)}(b)$.

Si $b \in B^d \cap (S_j^d \cup C_j^d)$ avec $j \neq i$ on a deux sous cas selon si b appartient ou pas à $\bigcup_{k=a}^{d-1} BS_i^k$.

– Dans le sous cas où $b \notin \bigcup_{k=a}^{d-1} BS_i^k$, on a par définition :

$$ChE2(i, a, d + 1)(b) = (b\alpha_i^a),$$

$$et ChE2(i, a, d)(b) = Ch(i, a, d)(b) = (b\alpha_i^a),$$

D'où $ChE2(i, a, d + 1)(b) = ChE2(i, a, d)(b)$ dans ce sous-cas.

– Dans le sous cas où $b \in \bigcup_{k=a}^{d-1} BS_i^k$, on a par définition :

$$ChE2(i, a, d + 1)(b) = (b'_1, \dots, b'_r), \text{ avec } b'_r = b \text{ ou } b'_r \in B^d;$$

$$et ChE2(i, a, d)(b) = Ch(i, a, d)(b) = (b''_1, \dots, b''_q), \text{ avec } b''_q \in B^d.$$

De la même manière que dans la démonstration de la proposition 4 page 16 on peut montrer par récurrence sur u , $1 \leq u \leq \min\{r, q\}$, que $b'_u = b''_u$.

Il reste à montrer que $r = q$ pour obtenir $ChE2(i, a, d + 1)(b) = ChE2(i, a, d)(b)$.

Supposons $r < q$ et montrons que ça ne peut être le cas.

On a par définition $b_r = b$ ou $b'_r \in B^d$. Comme on suppose $b \in B^d$ on a donc dans tous les cas $b'_r \in B^d$.

Par définition, puisque $r < q$, b''_r est un brin supprimé ou contracté entre les niveaux a et $d - 1$.

Par conséquent supposer que $b'_r = b''_r$ lorsque $r < q$ mène à une contradiction.

Donc $q \leq r$.

Supposons $q < r$ et montrons que ça ne peut être le cas.

par définition on a $b_q'' \in B^d$.

Comme $q < r$, b_q' est strictement à l'intérieur du chemin $ChE2_{(i,a,d+1)}(b)$. Et comme b_r' est le premier brin du chemin appartenant à B^d alors $b_q' \notin B^d$.

Par conséquent supposer que $b_q' = b_q''$ lorsque $q < r$ mène à une contradiction.

Donc q ne peut être plus petit que r .

Et donc $r = q$.

Ce qui nous permet d'obtenir également $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d)}(b)$ dans ce sous-cas.

Donc si $b \in B^d \cap (S_j^d \cup C_j^d)$ avec $j \neq i$ on a $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d)}(b)$.

Par conséquent, dans le cas où $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, on a $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d)}(b)$ et puisque l'on suppose $\mathcal{H}_d$ vraie alors $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = ChE_{(i,a,d+1)}(b)$.
C'est à dire $\mathcal{H}_{d+1}$ est bien vérifiée.

Regardons maintenant le cas où $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

Nous avons par définition :

$$ChE_{(i,a,d+1)}(b) = C = \left(ChE_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE_{(k_p,a,d)}(b_p) \right),$$

avec : $b_1 = b$,

$$\forall u, 1 \leq u < p, b_{u+1} \text{ est le dernier brin de } ChE_{(k_u,a,d)}(b_u),$$

$$\forall u, 1 \leq u \leq p, k_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^d, \end{cases}$$

et p est le plus petit entier tel que le dernier brin de C soit b , ou appartienne à BS_i^d .

Or par hypothèse de récurrence (hypothèse $\mathcal{H}_d$ vraie pour tout $i \in N$ et pour tout $b \in B^a$), nous avons : $ChE_{(k_u,a,d)}(b_u) = ChE2_{(k_u,a,d)}(b_u)$, $\forall u, 1 \leq u \leq p$.

Donc pour montrer que $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = ChE_{(i,a,d+1)}(b)$, il suffit de montrer que

$$ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = \left(ChE2_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE2_{(k_p,a,d)}(b_p) \right),$$

En utilisant la définition 9, posons :

- $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = (b_1', b_2', \dots, b_r')$, avec $b_{u+1}' = b_u' \alpha_{t_u'}^a$ pour $0 \leq u < r$;
- $\left(ChE2_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE2_{(k_p,a,d)}(b_p) \right) = (b_1'', b_2'', \dots, b_q'')$,
avec $b_{u+1}'' = b_u'' \alpha_{t_u''}^a$ pour $0 \leq u < q$;
- $ChE2_{(k_u,a,d)}(b_u) = (b_{u,1}^2, b_{u,2}^2, \dots, b_{u,s_u}^2)$,
avec $b_{u,v+1}^2 = b_{u,v}^2 \alpha_{t_{u,v}^2}^a$ pour $1 \leq u \leq p$ et $0 \leq v < s_u$.

De la même manière que dans la preuve de la proposition 4 page 16 (dans le cas où $b \in BS_i^d$), on peut montrer par récurrence sur u , $1 \leq u \leq \min\{r, q\}$ que $b_u' = b_u''$ et $t_{u-1}' = t_{u-1}''$.

Pour obtenir $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = \left(ChE2_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE2_{(k_p,a,d)}(b_p) \right)$, il reste maintenant à montrer que $r = q$.

Supposons $r < q$ et montrons que ce n'est pas vrai.

On a alors $b_r' = b_r''$ au milieu de $(b_1'', b_2'', \dots, b_q'')$. D'où d'après la définition 9 page 41 et la construction de $\left(ChE2_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE2_{(k_p,a,d)}(b_p) \right)$, b_r' disparaît au plus tard au niveau d et ne peut être égal à b . Or par construction de $ChE2_{(i,a,d+1)}(b)$, $b_r' \in BS_i^d$ ou $b_r' = b$.
D'où une contradiction. Donc $r \geq q$.

Supposons $q < r$ et montrons que ce n'est pas le cas.

On a alors $b_q'' = b_q'$ au milieu de $(b_1', b_2', \dots, b_r')$. D'où d'après la définition 9 page 41, b_q'' disparaît au plus tard au niveau d et ne peut être égal à b .

Or par construction de $(ChE2_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE2_{(k_p,a,d)}(b_p))$, $b''_q \in BS_i^d$ ou $b''_q = b$.
D'où une contradiction. Donc q ne peut être plus petit que r .

Par conséquent $r = q$, ce qui signifie que
 $ChE2_{(i,a,d+1)}(b) = (ChE2_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE2_{(k_p,a,d)}(b_p))$,
Or par hypothèse de récurrence $ChE_{(k_u,a,d)}(b_u) = ChE2_{(k_u,a,d)}(b_u)$, $\forall u, 1 \leq u \leq p$.
et par définition $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = C = (ChE_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE_{(k_p,a,d)}(b_p))$, car $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$. Donc dans le cas où $d+1 \leq niv_b + 1$ et $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, on a $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d+1)}(b)$.
Donc dans le cas où $d+1 \leq niv_b + 1$, on a $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ChE2_{(i,a,d+1)}(b)$, c'est à dire que $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Par conséquent $(\mathcal{H}_d)$ est vraie pour tout $d, a \leq d \leq m$.
Ce qui démontre la proposition. □

A partir de ces deux définitions (def 8 et 9), nous pouvons déduire de manière directe deux algorithmes qui calculent un chemin de connection étendu.

Le premier algorithme, basé sur la définition 8 est récursif et est similaire à l'algorithme 1 page 22. Il prend en entrée la dimension i du chemin, les deux niveaux entre lesquels on veut calculer le chemin, et le brin à partir duquel on veut examiner le chemin. A sa sortie on obtient le chemin de connection étendu sous forme d'une séquence de brins.

En comparaison avec l'algorithme 1,

- il considère tout d'abord le cas où $d > niv_b + 1$ (dans ce cas on a $ChE_{(i,a,d)}(b) = ()$);
- sa condition indiquant si le chemin est composé de plusieurs sous-chemins est augmentée : en effet dans l'algorithme 1 elle était " $b \in BS_i^{d-1}$ ", et maintenant elle est " $b \in BS_i^{d-1} \cup S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1}$ ";
- la condition d'arrêt de la concaténation des sous-chemins est également augmentée, puisque maintenant le dernier brin n'est pas nécessairement un brin de BS_i^{d-1} , il peut être également le brin initial du chemin;
- et lors de l'ajout des sous-chemins une condition supplémentaire est ajoutée. En effet dans l'algorithme 1, les sous-chemins étaient concaténés deux par deux, car on était sûr que le nombre de sous-chemins était impair. Par contre maintenant ce n'est plus nécessairement le cas, on peut être arrivé à la fin du chemin avec un nombre de sous-chemins pair, ce qui peut être le cas lorsque le dernier brin est le brin initial. Donc par rapport à l'algorithme 1, lorsque l'on ajoute de nouveaux sous-chemins 2 par 2, on met une condition à l'ajout du deuxième sous-chemin à savoir "que l'on a toujours pas atteint le brin initial".

Le second algorithme, basé sur la définition 9 est itératif et est similaire à l'algorithme 2 page 23. il prend en entrée la dimension i du chemin, les deux niveaux entre lesquels on veut calculer le chemin, et le brin à partir duquel on veut examiner le chemin. A sa sortie on obtient le chemin de connection sous forme d'une séquence de brins.

En comparaison avec l'algorithme 2,

- il considère tout d'abord le cas où $d > niv_b + 1$ (dans ce cas on a $ChE_{(i,a,d)}(b) = ()$);
- la condition de continuation de l'ajout de nouveaux brins dans le chemin est augmentée, puisque maintenant il faut prendre en compte le fait que le dernier brin du chemin peut également être le brin initial du chemin. Donc maintenant on ajoute un nouveau brin dans le chemin seulement si le dernier brin ajouté a disparu entre les niveaux a et $d-1$ sous certaines conditions ($brin \in \bigcup_{k=a}^{d-1} (S_{inv}^k \cup S_{inv-1}^k \cup C_{inv}^k \cup C_{inv+1}^k)$) et si il ne correspond pas

au brin initial.

Ces deux algorithmes ont même complexité $(\Theta(d'p))$. Toute fois on préférera en pratique utiliser l'algorithme itératif afin d'éviter de surcharger la place mémoire par l'utilisation d'une pile de récursivité.

Étant donné un chemin de connection étendu $ChE_{(i,a,b)}(d)$, on peut déduire deux ensembles de brins : l'ensemble connectant ouvert étendu $EchE_{(i,a,d)}^\circ(b)$ et l'ensemble connectant fermé étendu $EchE_{(i,a,d)}(b)$ (voir figure 10). Ces deux ensembles de brins se définissent de manière similaire à l'ensemble connectant ouvert $Ech_{(i,a,d)}^\circ(b)$ et l'ensemble connectant fermé $Ech_{(i,a,d)}(b)$. La notion d'orbite généralisée est basée sur ces deux ensembles.

Définition 10 (Ensembles connectant étendus ouvert et fermé) : Soit $i \in N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Pour chaque brin $b \in B^a$:

- $EchE_{(i,a,d)}^\circ(b)$ est l'ensemble de brins du chemin de connection $ChE_{(i,a,d)}(b)$, excepté le dernier brin ;
 - $EchE_{(i,a,d)}(b) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } ChE_{(i,a,d)}(b) = () \\ EchE_{(i,a,d)}^\circ(b) \cup \{b, b'\} & \text{sinon, où } b' \text{ est le dernier brin de } ChE_{(i,a,d)}(b) \end{cases}$
-
-

4.2.2 Propriétés

Dans cette partie sont exposées et démontrées différentes propriétés des chemins de connection étendus. Celles-ci sont des propriétés analogues à celles des chemins de connection.

Proposition 16 : Pour tout $i \in N$, a, d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^a$, on a :

1. la séquence de brins correspondant à $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est unique ;
2. et l'ensemble de brins représentant $EchE_{(i,a,d)}(b)$ est unique.

Preuve : Se démontre de la même manière que la proposition 5 page 24, en prenant $b \in B^a$, et en considérant cette fois un troisième cas : celui où $d+1 > niv_b + 1$ impliquant $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ()$. □

Proposition 17 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}$, vérifiant $0 \leq a < d \leq m, \forall b \in B^a$ tel que $b \in (BS_i^{d-1} \cup S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$, on a :

$$ChE_{(i,d-1,d)}(b) = (b_2, \dots, b_p, b_{p+1}),$$

$$\text{et par suite : } EchE_{(i,d-1,d)}(b) \subseteq EchE_{(i,a,d)}(b).$$

Les brins $b_u, 2 \leq u \leq p+1$, étant ceux de la décomposition de $ChE_{(i,a,d)}(b)$ selon la définition 8 page 40, (b_{p+1} est le dernier brin de $ChE_{(i,a,d)}(b)$).

Preuve : Se démontre de la même manière que la proposition 7 page 26.

Cette fois $b \in B^a \cap (BS_i^{d-1} \cup S_i^{d-1} \cup C_i^{d-1})$, et non pas $b \in B^d \cap BS_i^{d-1}$. Cependant dans ces deux cas, la décomposition de $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est la même, seule change la condition d'arrêt qui n'est plus seulement "le dernier brin du chemin de connection étendu (b_{p+1}) appartient à BS_i^{d-1} " mais est devenu "le dernier brin du chemin de connection étendu (b_{p+1}) est b , ou appartient à BS_i^{d-1} ".

Ces différences ne changent pas la démonstration. □

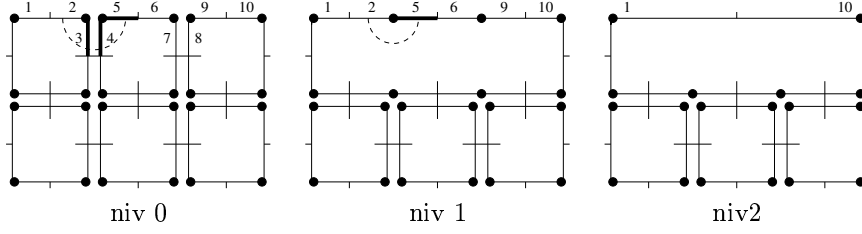


FIG. 12 – Illustration de la proposition 18 page 48. Les chemins de connection issus de 2 $Ch_{(1,0,2)}(2) = (3, 4, 5)$ et $Ch_{(1,1,2)}(2) = (5)$ ont leur dernier brin égaux.

Proposition 18 : $\forall i \in \mathbb{N}, \forall a, a', d \in \mathbb{N}, \text{ vérifiant } 0 \leq a \leq d \leq m, \text{ et } 0 \leq a' \leq d \leq m, \text{ et } \forall b \in B^{\max\{a, a'\}}, \text{ on a :}$

$$\text{dernier brin de } ChE_{(i,a,d)}(b) = \text{dernier brin de } ChE_{(i,a',d)}(b).$$

Preuve :

Soit $i \in \mathbb{N}$.

Soit $a, a' \in \mathbb{N}$, vérifiant $0 \leq a \leq m$, et $0 \leq a' \leq m$.

Si $a = a'$, on remarque que l'égalité à démontrer est évidente quelque soit $d \in \mathbb{N}$, $a, a' \leq d \leq m$. Donc dans la suite de la démonstration nous allons supposer que $a \neq a'$.

Le cas où $a < a'$ étant symétrique au cas où $a' < a$ nous ne traiterons que le cas où $a < a'$.

Nous allons montrer par récurrence sur d que $\forall d \in \mathbb{N}$, $a' \leq d \leq m$ l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{H}_d) : \forall b \in B^d, \text{ dernier brin de } ChE_{(i,a,d)}(b) = \text{dernier brin de } ChE_{(i,a',d)}(b).$$

– pour $d = a'$

Soit $b \in B^{a'}$.

D'après la définition 8 page 40, nous avons : $ChE_{(i,a',a')}(b) = Ch_{(i,a',a')}(b) = (b\alpha_i^{a'})$.

Puisque $b \in B^{a'}$, par la proposition 2 page 12, nous savons que le dernier brin de $ChE_{(i,a,a')}(b)$ est $b\alpha_i^{a'}$. Donc :

$$\text{dernier brin de } ChE_{(i,a,a')}(b) = \text{dernier brin de } ChE_{(i,a',a')}(b).$$

Et ceci est vrai pour tout $b \in B^{a'}$.

Donc $\mathcal{H}_{a'}$ est vraie .

– supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour d ($a' \leq d < m$) et montrons qu'elle est encore vraie au rang $d + 1$.

Soit $b \in B^{a'}$.

Si $d + 1 > niv_b + 1$, on a alors $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ()$ et $ChE_{(i,a',d+1)}(b) = ()$.

Et donc par vacuité nous avons bien dernier brin de $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = \text{dernier brin de } ChE_{(i,a',d+1)}(b)$ dans ce cas.

Sinon (si $d + 1 \leq niv_b + 1$), nous devons regarder 2 cas : celui où $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$ et celui où $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

Si $b \notin (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, on a alors par définition $ChE_{(i,a,d+1)}(b) = ChE_{(i,a,d)}(b)$ et $ChE_{(i,a',d+1)}(b) = ChE_{(i,a',d)}(b)$ or on suppose $\mathcal{H}_d$ vraie, c'est à dire que le dernier brin de $ChE_{(i,a,d)}(b)$ est aussi celui de $ChE_{(i,a',d)}(b)$. Donc $ChE_{(i,a,d+1)}(b)$ et $ChE_{(i,a',d+1)}(b)$ ont même dernier brin dans ce cas.

Regardons maintenant le cas où $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

D'après la définition 8 page 40, $ChE_{(i,a,d+1)}(b)$ et $ChE_{(i,a',d+1)}(b)$ se décomposent de la façon suivante :

$$ChE_{(i,a,d+1)}(b) = C = \left(ChE_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE_{(k_p,a,d)}(b_p) \right)$$

et

$$ChE_{(i,a',d+1)}(b) = C' = \left(ChE_{(l_1,a',d)}(b'_1), \dots, ChE_{(l_r,a',d)}(b'_r) \right).$$

Pour montrer que

$$\text{dernier brin de } ChE_{(i,a,d+1)}(b) = \text{dernier brin de } ChE_{(i,a',d+1)}(b),$$

il suffit alors de montrer que

$$\text{dernier brin de } ChE_{(k_p,a,d)}(b_p) = \text{dernier brin de } ChE_{(l_r,a',d)}(b'_r).$$

Pour cela nous allons montrer par récurrence sur u que $\forall u, 1 \leq u \leq \min\{r, p\}$, l'hypothèse $\mathcal{G}_u$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{G}_u) : b_u = b'_u \in B^d$$

– pour $u = 1$

On a par définition $b_1 = b, b'_1 = b$ et nous sommes dans le cas où $b \in B^d$.

Donc $\mathcal{G}_1$ est vraie.

– supposons l'hypothèse $\mathcal{G}_u$ vraie pour u vérifiant $1 \leq u < \min\{r, p\}$ et montrons que $\mathcal{G}_{u+1}$ est vraie.

Par construction b_{u+1} et b'_{u+1} sont les derniers brins de $ChE_{(k_u,a,d)}(b_u)$ et de $ChE_{(l_u,a',d)}(b'_u)$.

Puisque d'après $\mathcal{G}_u, b_u$ et $b'_u \in B^d$, alors d'après la proposition 2 page 12, on a $b_{u+1} = b_u \alpha_{k_u}^d$ et $b'_{u+1} = b'_u \alpha_{l_u}^d$ et par suite b_{u+1} et $b'_{u+1} \in B^d$.

Par construction on a également $k_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b_u \in C_i^d, \end{cases}$

et $l_u = \begin{cases} i & \text{si } u \text{ est impair,} \\ i+1 & \text{si } u \text{ est pair et } b'_u \in S_i^d, \\ i-1 & \text{si } u \text{ est pair et } b'_u \in C_i^d, \end{cases}$

Puisque $\mathcal{G}_u$ est vraie, on a $b_u = b'_u$. On en déduit alors que $k_u = l_u$ et par suite que $b_{u+1} = b'_{u+1} \in B^d$.

Donc $\mathcal{G}_{u+1}$ est vraie.

Donc $\forall u, 1 \leq u \leq \min\{r, p\}$, $\mathcal{G}_u$ est vraie, c'est à dire que :

$$b_u = b'_u.$$

Supposons que $r \leq p$ (le cas où $p \leq r$ étant symétrique).

Nous allons montrer par contradiction que nécessairement $r = p$.

Supposons donc que $r < p$.

Par définition, le dernier brin de $ChE_{(l_r,a',d)}(b'_r)$ que l'on nomme b'_{r+1} est aussi celui de $ChE_{(i,a',d+1)}(b)$ et appartient à BS_i^d ou correspond à b .

De même, par définition on sait que le dernier brin de $ChE_{(k_p,a,d)}(b_p)$ que l'on nomme b_{p+1} est aussi celui de $ChE_{(i,a,d+1)}(b)$ et est le premier brin du chemin qui appartienne à BS_i^d ou corresponde à b .

Donc en considérant que $b_r = b'_r$ avec $r < p$ on obtient une contradiction.

Donc $r = p$.

Puisque nous avons par construction

$$\begin{aligned} \text{dernier brin de } ChE_{(i,a,d+1)}(b) &= \text{dernier brin de } ChE_{(k_p,a,d)}(b_p), \\ \text{dernier brin de } ChE_{(i,a',d+1)}(b) &= \text{dernier brin de } ChE_{(l_r,a',d)}(b'_r), \end{aligned}$$

que l'on vient de montrer $b_p = b'_r$ et $r = p$ et que d'après $\mathcal{H}_d$, le dernier brin de $ChE_{(k_p,a,d)}(b_p)$ est aussi celui de $ChE_{(k_p,a',d)}(b_p)$, alors $ChE_{(i,a,d+1)}(b)$ et $ChE_{(i,a',d+1)}(b)$ ont même dernier brin dans ce dernier cas.

Et toute cette démonstration est vraie quelque soit $b \in B^{d+1}$.
Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Donc $\forall d \in \mathbb{N}, a < a' \leq d \leq m, \forall b \in B^d$ on a

$$\text{dernier brin de } ChE_{(i,a,d)}(b) = \text{dernier brin de } ChE_{(i,a',d)}(b).$$

Or toute cette démonstration est vraie quelque soit $i \in N$, et $a, a' \in \mathbb{N}$, vérifiant $0 \leq a \leq d \leq m$, et $0 \leq a' \leq d \leq m$.

□

Proposition 19 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}, 0 < a \leq d \leq m, \forall b \in B^a$, on a :

$$EchE_{(i,a,d)}(b) \subseteq EchE_{(i,a-1,d)}(b).$$

Preuve : Se démontre de la même manière que la proposition 9 page 28.

Puisque l'on prend $\forall b \in B^a$ et non plus $\forall b \in B^d$, on doit considérer un cas supplémentaire : celui où $d+1 > niv_b + 1$. Par définition, définition 10 page 47, on a dans ce cas

$$EchE_{(i,a,d+1)}(b) = \emptyset \text{ et } EchE_{(i,a-1,d+1)}(b) = \emptyset.$$

D'où $EchE_{(i,a,d+1)}(b) \subseteq EchE_{(i,a-1,d+1)}(b)$.

□

Proposition 20 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq d < m, \forall b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, et pour tout brin b_u ($2 \leq u \leq p$) intervenant dans la décomposition de $ChE_{(i,a,d+1)}(b)$ on a

$$\begin{aligned} b_u &\in (S_i^d \cup C_i^d) \subseteq B^d, \\ \text{et le dernier brin de } ChE_{(i,a,d+1)}(b) &\in B^d. \end{aligned}$$

La décomposition de $ChE_{(i,a,d+1)}(b)$ considérée est celle de la définition 8 page 40 :

$$ChE_{(i,a,d+1)}(b) = C = \left(ChE_{(k_1,a,d)}(b_1), \dots, ChE_{(k_p,a,d)}(b_p) \right).$$

Preuve : Soit $i \in N, a, d \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq a \leq d < m$, et soit $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

Nous allons montrer par récurrence sur u , que $\forall u, 2 \leq u \leq p$, l'hypothèse $\mathcal{H}_u$ suivante est vraie.

$$(\mathcal{H}_u) : b_u \in (S_i^d \cup C_i^d)$$

– pour $u = 2$

Par construction, b_2 est le dernier brin de $ChE_{(k_1, a, d)}(b_1)$.

Or $b_1 = b \in B^d$ d'où $ChE_{(k_1, a, d)}(b_1) = Ch_{(k_1, a, d)}(b_1)$ et $k_1 = i$. En utilisant la proposition 2 page 12, on obtient alors $b_2 = b\alpha_i^d$.

Comme $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$, et que par α_i on change de i -cellule c'est à dire que l'on peut passer d'une i -cellule disparue à une i -cellule survivante ou une autre i -cellule disparue, ou alors passer d'une i -cellule survivante à une i -cellule disparue, alors $b_2 \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

Or par définition, seul le dernier brin de C peut appartenir à BS_i^d , et b_2 n'est pas supposé ici être le dernier brin.

Donc $b_2 \in (S_i^d \cup C_i^d) \subseteq B^d$.

Donc $\mathcal{H}_2$ est vraie.

– supposons $\mathcal{H}_u$ avec $2 \leq u < p$ vraie et montrons que $\mathcal{H}_{u+1}$ est vraie.

Par construction, b_{u+1} est le dernier brin de $ChE_{(k_u, a, d)}(b_u)$. Or $b_u \in B^d$ d'où $ChE_{(k_u, a, d)}(b_u) = Ch_{(k_u, a, d)}(b_u)$ et $b_u \in \{i, i-1, i+1\}$. En utilisant la proposition 2 page 12, on obtient alors $b_{u+1} = b_u\alpha_{k_u}^d$.

Comme $b_u \in (S_i^d \cup C_i^d)$, que par α_i on ne change pas de i -cellule et que de α_{i+1} ou α_{i-1} on change de i -cellule, alors $b_{u+1} \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

Or par définition, seul le dernier brin de C peut appartenir à BS_i^d , et b_{u+1} n'est pas supposé ici être le dernier brin.

Donc $b_{u+1} \in (S_i^d \cup C_i^d) \subseteq B^d$.

Donc $\mathcal{H}_{u+1}$ est vraie.

Donc $\forall u, 2 \leq u \leq p, b_u \in (S_i^d \cup C_i^d) \subseteq B^d$.

De plus, par construction, on sait que le dernier brin de $ChE_{(i, a, d+1)}(b)$ est b ou appartient à BS_i^d . Dans les deux cas on a le dernier brin de $ChE_{(i, a, d+1)}(b) \in B^d$.

Et tout ce que l'on a montré est vrai quelque soit $i \in N, a, d \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq a \leq d < m$, et $b \in (BS_i^d \cup S_i^d \cup C_i^d)$.

□

Proposition 21 : $\forall i \in N, \forall a, d \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq d \leq m, \forall b \in B^a$, on a :

tout brin de $EchE_{(i, a, d)}^\circ(b)$ appartient à une cellule supprimée ou contractée entre les niveaux a et d .

c'est à dire :

$\forall b' \in EchE_{(i, a, d)}^\circ(b), \exists j \in N$ et $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $a \leq k < d$ et $b' \in (S_j^k \cup C_j^k)$.

Preuve : Soit $a \in \mathbb{N}, 0 \leq a \leq m$.

Du fait de la définition du chemin de connection étendu (def 8 page 40), on s'aperçoit que pour tout $d > niv_b + 1$ on a $ChE_{(i, a, d)}(b) = ()$ d'où $EchE_{(i, a, d)}^\circ(b) = \emptyset$.

Et donc pour tout $d > niv_b + 1$ on a bien $EchE_{(i, a, d)}^\circ(b)$ inclus dans l'ensemble des brins qui appartiennent à des cellules supprimées ou contractées entre les niveaux a et d .

Pour le cas où $d \leq niv_b + 1$, la démonstration est exactement la même que celle de la proposition 6 page 25.

□

Proposition 22 : $\forall i_1, i_2 \in N$,
 $\forall a, d \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq a \leq d \leq m$,
 $\forall b, b' \in B^a$, vérifiant

1. $b \notin EchE_{(i_2, a, d)}^\circ(b')$,
2. $b' \notin EchE_{(i_1, a, d)}^\circ(b)$,
3. si $i_1 = i_2$: $\begin{cases} b' \notin \{b, \text{ le dernier brin de } ChE_{(i_1, a, d)}(b)\}, \\ b \notin \{b', \text{ le dernier brin de } ChE_{(i_2, a, d)}(b')\}. \end{cases}$

On a alors :

$$EchE_{(i_1, a, d)}^\circ(b) \cap EchE_{(i_2, a, d)}^\circ(b') = \emptyset .$$

Preuve : Soit $a \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq a \leq m$.

Pour tout $d > niv_b + 1$, on a par définition du chemin de connection étendu et des ensembles connectant étendus ouverts et fermés (définitions 8 et 10 pages 40 et 47) :

$$ChE_{(i_1, a, d)}(b) = () \text{ d'où } EchE_{(i_1, a, d)}^\circ(b) = \emptyset .$$

De même pour tout $d > niv_{b'} + 1$, on a

$$ChE_{(i_2, a, d)}(b') = () \text{ d'où } EchE_{(i_2, a, d)}^\circ(b') = \emptyset .$$

Donc pour tout $d > \min\{niv_b, niv_{b'}\} + 1$, on a

$$EchE_{(i_1, a, d)}^\circ(b) \cap EchE_{(i_2, a, d)}^\circ(b') = \emptyset .$$

Examinons maintenant le cas où $a \leq d \leq \min\{niv_b, niv_{b'}\} + 1$ c'est à dire $b, b' \in B^{d-1}$.

Nous allons montrer par récurrence sur d , que $\forall d, a \leq d \leq \min\{niv_b, niv_{b'}\} + 1$, l'hypothèse $\mathcal{H}_d$ suivante est vraie.

$(\mathcal{H}_d) : \forall i_1, i_2 \in N, \forall b, b' \in B^{d-1}$, tels que

1. $b \notin EchE_{(i_2, a, d)}^\circ(b')$,
2. $b' \notin EchE_{(i_1, a, d)}^\circ(b)$,
3. si $i_1 = i_2$: $\begin{cases} b' \notin \{b, \text{ le dernier brin de } ChE_{(i_1, a, d)}(b)\}, \\ b \notin \{b', \text{ le dernier brin de } ChE_{(i_2, a, d)}(b')\}. \end{cases}$

On a alors :

$$EchE_{(i_1, a, d)}^\circ(b) \cap EchE_{(i_2, a, d)}^\circ(b') = \emptyset .$$

– pour $d = a$

On montre de la même manière que dans la proposition 12 page 32 que $\mathcal{H}_a$ est vraie.

– supposons $\mathcal{H}_d$ vraie pour $a \leq d < \min\{niv_b, niv_{b'}\} + 1$, et montrons que $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Soit $i_1, i_2 \in N$,

Soit $b, b' \in B^d$ vérifiant les hypothèses de $(\mathcal{H}_{d+1})$.

D'après la définition 8 page 40 on a : $ChE_{(i_1, a, d+1)}(b) = (ChE_{(k_0, a, d)}(b_0), \dots, ChE_{(k_p, a, d)}(b_p))$

et $ChE_{(i_2, a, d+1)}(b') = (ChE_{(l_0, a, d)}(b'_0), \dots, ChE_{(l_r, a, d)}(b'_r))$ avec p et r pouvant être égaux à 0.

Notons également b_{p+1} le dernier brin de $ChE_{(k_p, a, d)}(b_p)$ et b'_{r+1} le dernier brin de $ChE_{(l_r, a, d)}(b'_r)$.

D'après la définition 10 page 47, on a alors

$$EchE_{(i_1,a,d+1)}^\circ(b) = \left(\bigcup_{u=0}^p EchE_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u) \right) \cup \left(\bigcup_{u=1}^p \{b_u\} \right)$$

et $EchE_{(i_2,a,d+1)}^\circ(b') = \left(\bigcup_{v=0}^r EchE_{(l_v,a,d)}^\circ(b'_v) \right) \cup \left(\bigcup_{v=1}^r \{b'_v\} \right).$

Donc pour montrer que $EchE_{(i_1,a,d+1)}^\circ(b) \cap EchE_{(i_2,a,d+1)}^\circ(b') = \emptyset$ il suffit de montrer :

$$\left\{ \begin{array}{ll} Ech_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u) \cap EchE_{(l_v,a,d)}^\circ(b'_v) = \emptyset & \forall u, 0 \leq u \leq p \quad \forall v, 0 \leq v \leq r \\ b_u \notin EchE_{(l_v,a,d)}^\circ(b'_v) & \forall u, 1 \leq u \leq p \quad \forall v, 0 \leq v \leq r \\ b'_v \notin EchE_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u) & \forall u, 0 \leq u \leq p \quad \forall v, 1 \leq v \leq r \\ b_u \neq b'_v & \forall u, 1 \leq u \leq p \quad \forall v, 1 \leq v \leq r \end{array} \right. \quad (18)$$

Pour montrer le premier point de (18) il suffit de vérifier que les hypothèses sont vérifiées au rang d pour pouvoir appliquer $\mathcal{H}_d$ que l'on suppose vraie.

Donc pour montrer (18) il suffit de montrer que

$$\left\{ \begin{array}{ll} b_u \notin EchE_{(l_v,a,d)}^\circ(b'_v) & \forall u, 0 \leq u \leq p \quad \forall v, 0 \leq v \leq r \\ b'_v \notin EchE_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u) & \forall u, 0 \leq u \leq p \quad \forall v, 0 \leq v \leq r \\ b_u \neq b'_v & \forall u, 1 \leq u \leq p \quad \forall v, 1 \leq v \leq r \\ \forall u, 0 \leq u \leq p \\ \forall v, 0 \leq v \leq r \end{array} \right\} \quad si \quad k_u = l_v \quad b_u \neq b'_v \quad b_u \neq b'_{v+1} \quad b_{u+1} \neq b'_v \quad (19)$$

Or d'après la proposition 20 page 50 on a $b_u \in (S_{i_1}^d \cup C_{i_1}^d) \forall u, 1 \leq u \leq p$ et $b'_v \in (S_{i_2}^d \cup C_{i_2}^d) \forall v, 1 \leq v \leq r$.

Et d'après la proposition 21 page 51 on sait que les brins de $EchE_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u)$ ainsi que ceux de $EchE_{(l_v,a,d)}^\circ(b'_v)$ appartiennent à des cellules supprimées ou contractées entre les niveaux a et d . Par conséquent ils ne peuvent appartenir à des cellules supprimées ou contractées au niveau d .

Donc $b_u \notin EchE_{(l_v,a,d)}^\circ(b'_v), \forall u, 1 \leq u \leq p, \forall v, 0 \leq v \leq r,$

et $b'_v \notin EchE_{(k_u,a,d)}^\circ(b_u), \forall u, 0 \leq u \leq p, \forall v, 1 \leq v \leq r.$

Et par hypothèses nous avons $b_0 \notin EchE_{(i_2,a,d+1)}^\circ(b')$ et $b'_0 \notin EchE_{(i_1,a,d+1)}^\circ(b).$

Par suite, les deux premiers points de (19) sont vérifiés.

Donc pour montrer (19) il reste à montrer que

$$\left\{ \begin{array}{llll} \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & & b_u \neq b'_v \\ \forall u, 0 \leq u \leq p & \forall v, 0 \leq v \leq r & si \quad k_u = l_v & b_u \neq b'_v \\ \forall u, 1 \leq u \leq p+1 & \forall v, 0 \leq v \leq r & si \quad k_{u-1} = l_v & b_u \neq b'_v \\ \forall u, 0 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r+1 & si \quad k_u = l_{v-1} & b_u \neq b'_v \end{array} \right. \quad (20)$$

En décomposant les 4 inéquations de façon à observer u et v selon les intervalles $1 \leq u \leq p$ et $1 \leq v \leq r$ et les cas $u = 0, v = 0, u = p$ et $v = r$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{llll} \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & & b_u \neq b'_v \\ & & si \quad k_0 = l_0 & b_0 \neq b'_0 \\ & \forall v, 1 \leq v \leq r & si \quad k_0 = l_v & b_0 \neq b'_v \\ \forall u, 1 \leq u \leq p & & si \quad k_u = l_0 & b_u \neq b'_0 \\ & & si \quad k_p = l_0 & b_{p+1} \neq b'_0 \\ \forall u, 1 \leq u \leq p & & si \quad k_{u-1} = l_0 & b_u \neq b'_0 \\ & \forall v, 1 \leq v \leq r & si \quad k_p = l_v & b_{p+1} \neq b'_v \\ & & si \quad k_0 = l_r & b_0 \neq b'_{r+1} \\ & \forall v, 1 \leq v \leq r & si \quad k_0 = l_{v-1} & b_0 \neq b'_v \\ \forall u, 1 \leq u \leq p & & si \quad k_u = l_r & b_u \neq b'_{r+1} \end{array} \right. \quad (21)$$

D'après les hypothèses on a $b_0 \notin EchE_{(i_2,a,d+1)}^\circ(b'), b'_0 \notin EchE_{(i_1,a,d+1)}^\circ(b).$ D'où :

- $b_0 \neq b'_v, \forall v, 1 \leq v \leq r,$
- $b'_0 \neq b_u, \forall u, 1 \leq u \leq p,$

Et toujours par hypothèses, si $i_1 = i_2$ alors $b_0 \neq b'_0, b_0 \neq b'_{r+1}$ et $b'_0 \neq b_{p+1}$. On a alors :

- si $k_0 = l_0 : b_0 \neq b'_0,$
- si $k_0 = l_r$ et r pair (c'est à dire si $l_r = i_2$) : $b_0 \neq b'_{r+1},$
- si $k_p = l_0$ et p pair (c'est à dire si $k_p = i_1$) : $b'_0 \neq b_{p+1}.$

D'où en utilisant ceci on démontre en partie les points de (21).

Il ne nous reste plus qu'à montrer que

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall u, 1 \leq u \leq p & \forall v, 1 \leq v \leq r & b_u \neq b'_v \\ & \forall v, 1 \leq v \leq r & \begin{array}{l} \text{si } k_p = l_0 \text{ et } k_p \neq i_1 \\ \text{si } k_p = l_v \\ \text{si } k_0 = l_r \text{ et } l_r \neq i_2 \end{array} & \begin{array}{l} b_{p+1} \neq b'_0 \\ b_{p+1} \neq b'_v \\ b_0 \neq b'_{r+1} \end{array} \\ \forall u, 1 \leq u \leq p & & \text{si } k_u = l_r & b_u \neq b'_{r+1} \end{array} \right. \quad (22)$$

Et le reste de la démonstration est exactement la même que celle de la proposition 12 page 32.

Donc $\mathcal{H}_{d+1}$ est vraie.

Donc $\mathcal{H}_d$ est vraie pour tout $d, a \leq d \leq \min\{niv_b, niv_{b'}\} + 1$.

Or toute cette démonstration est vraie quelque soit $a \in \mathbb{N}$, tels que $0 \leq a \leq m$.

Par conséquent la proposition est donc vraie.

□

5 Orbites généralisées

Dans cette partie nous allons tout d'abord définir la notion d'orbite généralisée dans le cadre des pyramides de n -G-cartes, puis nous présenterons quelques propriétés les concernant.

5.1 Définitions

Prenons l'exemple d'une pyramide de n -G-cartes associée à une image en niveaux de gris segmentée à différents niveaux en utilisant un critère d'homogénéité. Au niveau 0, les n -cellules correspondent aux différentes cellules de l'image. Aussi, un niveau de gris est associé à chaque n -cellules de ce niveau, mais les cellules des autres niveaux n'ont pas de niveau de gris associé. Afin de calculer le niveau de gris associé à une cellule d'un niveau quelconque, il est nécessaire de calculer l'ensemble des cellules du niveau 0 qui correspondent à cette n -cellule, et de déduire le niveau de gris en fonction des niveaux de gris associés aux n -cellules du niveau 0.

Plus généralement, soit a et d deux niveaux quelconques d'une pyramide de n -G-cartes $\mathcal{P}$ tel que $0 \leq a \leq d \leq m$. Soit $\mathcal{O} = \langle \rangle_{(K)^d}(b)$ une orbite de G^d , la n -G-carte du niveau d de $\mathcal{P}$. L'ensemble des brins correspondant à $\mathcal{O}$ au niveau a est une orbite généralisée. De manière non formelle, si l'on considère comme orbites les n -cellules représentant les régions, une orbite généralisée calculée entre les niveau a et d est l'ensemble des orbites c'est à dire des régions du niveau a qui sont "fusionnées" en l'orbite (en la région) du niveau d . Dans le cas particulier où l'orbite du niveau d est une cellule, on appelle cellule généralisée l'orbite généralisée correspondante.

Une orbite généralisée peut être calculée séquentiellement en lui ajoutant petit à petit les brins qui la composent. L'idée est d'ajouter un à un les brins supprimés ou contractés entre les niveaux que l'on s'est fixés et qui permettent de relier un brin déjà reconnu comme étant dans l'orbite généralisée et son voisin par α_i (une involution composant l'orbite) au plus haut niveau fixé. Le parcours de tels brins correspond à la notion de chemin de connection (étendu ou pas) définie dans la section précédente.

Puisque l'orbite généralisée doit représenter un ensemble d'orbites (au niveau le plus bas fixé) étant intervenues dans la l'élaboration d'une orbite (au niveau le plus haut fixé), que les seules opérations de construction d'une pyramide considérées sont la suppression et la contraction, il est clair que les brins composant cette orbite finale ont fait partie des orbites initiales ou du moins d'une partie d'entre elles. Par conséquent, l'initialisation de la construction de l'orbite généralisée peut être réalisée par n'importe quel brin de l'orbite du plus haut niveau fixé.

Définition 11 (La suite $\left(OG_{n(K,a,d)}(b)\right)_{0 \leq n \leq p}$) : Soit $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et soit $b \in B^d$.

La suite $\left(OG_{n(K,a,d)}(b)\right)_{0 \leq n \leq p}$ est définie de la manière suivante :

- $OG_{0(K,a,d)}(b) = \{b\}$;

- et $\forall n > 0$:

$$OG_{n(K,a,d)}(b) = \bigcup_{i \in K} \bigcup_{b' \in OG_{n-1(K,a,d)}(b)} EchE_{(i,a,\min\{d, niv_{b'}+1\})}(b') ;$$

Remarque 1 : Pour $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^d$,

la suite $\left(OG_{n(K,a,d)}(b)\right)_{0 \leq n \leq p}$ est

1. croissante,
2. bornée par B^a ,
3. stationnaire et plus particulièrement :

$$\exists p, 0 \leq p \leq |B^a|, \text{ tel que } OG_{n(K,a,d)}(b) = OG_p(K,a,d)(b) \quad \forall n \geq p.$$

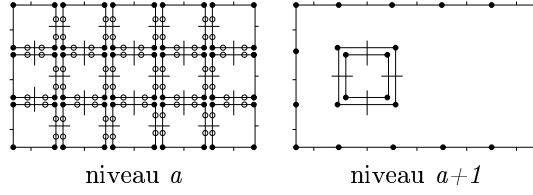


FIG. 13 – Exemple de deux niveaux consécutifs d’une pyramide. Les arêtes supprimées au niveau a sont marquées d’un cercle.

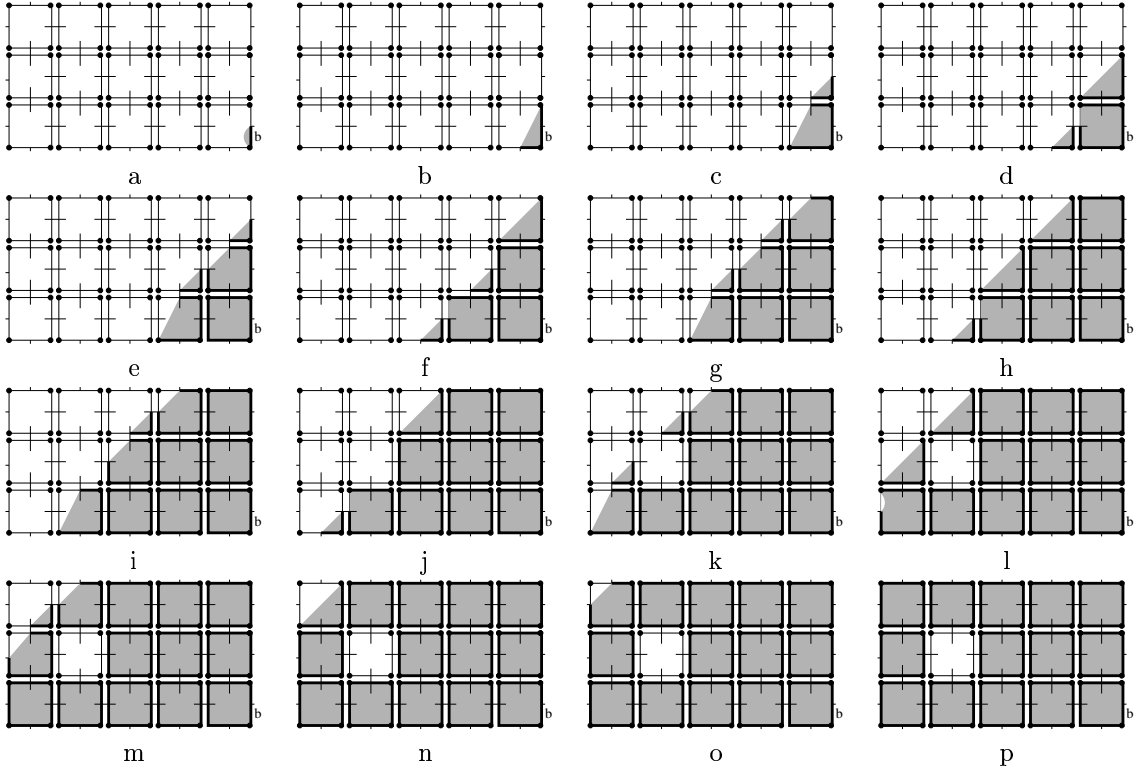


FIG. 14 – Exemple de suite $\left(OG_{n(K,a,d)}(b)\right)_{0 \leq n \leq 15}$. De (a) à (p) sont représentés chaque pas de la suite $\left(OG_{n(K,0,1)}(b)\right)_{0 \leq n \leq 15}$ (avec $K = \{0, 1\}$) correspondant à la pyramide de la figure 13 page 56.

En effet : $\left(OG_{n(K,a,d)}(b)\right)_{0 \leq n \leq p}$ est

1. croissante car chaque élément de la suite est construit par ajout de brins,
2. bornée car on peut ajouter au plus tous les brins de la G-carte où on se situe,
3. et stationnaire puisque croissante et bornée.

D’autre part, puisque à chaque pas de la suite on ajoute au moins un brin, la suite $\left(OG_{n(K,a,d)}(b)\right)_{0 \leq n \leq p}$ atteindra sa limite en au plus $|B^a|$ pas.

Puisque de telles suites sont convergentes en un nombre fini d’itérations, on peut considérer leur limite.

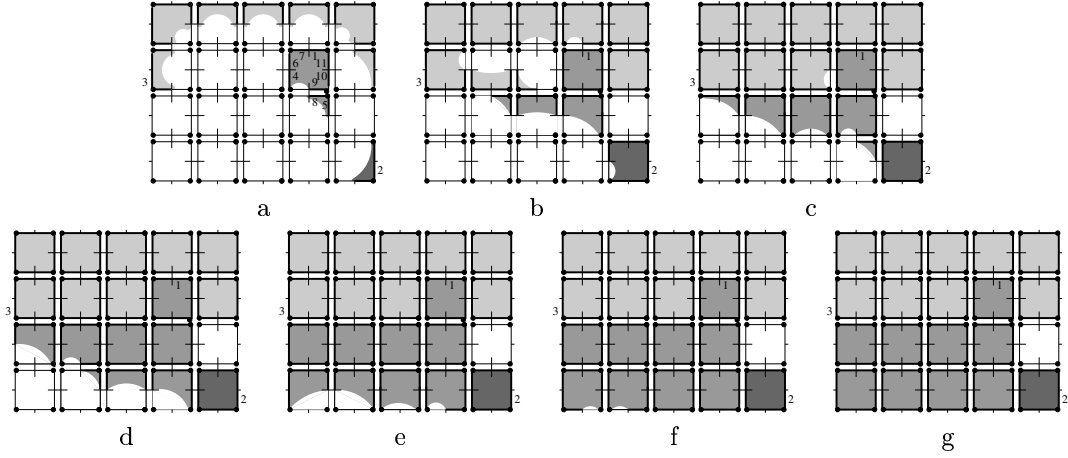


FIG. 15 – Calcul de l'orbite généralisée correspondante à l'orbite $\langle \rangle_K = \langle \rangle_{\{0,1\}}$ (l'orbite face) pour les brins 1, 2 et 3 dans la pyramide de la figure 5 page 9. (a) $OG_{1(K,0,5)}$ pour les brins 1, 2 et 3, sont représentées par différents niveaux de gris. de (b) à (g) $OG_{j(K,0,5)}$, pour les brins 1, 2 et 3, pour $j = 2$ à $j = 7$, sont représentées par différents niveaux de gris. Notons que $OG_{j(K,0,5)} = OG_{7(K,0,5)}$ pour $j > 7$. Par exemple, quand on calcule $OG_{1(K,0,5)}(1)$, on ajoute les brins de $ChE_{(0,0,5)}(1) = (7, 6, 4)$ et $ChE_{(1,0,5)}(1) = (11, 10, 9, 8, 5)$.

Définition 12 (Orbite généralisée $OG_{(K,a,d)}(b)$) : Soit $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^d$. L'orbite généralisée $OG_{(K,a,d)}(b)$ est définie comme étant la limite de la suite $(OG_{n(K,a,d)}(b))_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 2 : Soit $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^d$.

Si $b' \in OG_{(K,a,d)}(b)$ il existe alors un entier p le plus petit possible tel que $b' \in OG_{p(K,a,d)}(b)$ et plus précisément tel que

$$\begin{aligned} b' &\in OG_{q(K,a,d)}(b) \quad \forall q \geq p \text{ et} \\ b' &\notin OG_{q(K,a,d)}(b) \quad \forall q < p. \end{aligned}$$

Dire que $b' \in OG_{(K,a,d)}(b)$ est alors équivalent à dire qu'il existe une suite minimale de brins $\{b_1, b_2, \dots, b_{p+1}\} \subseteq OG_{(K,a,d)}(b)$ reliant b et b' telle que

$$\begin{cases} b_1 = b \\ b_{p+1} = b' \\ b_{u+1} \in EchE_{(t_u, a, d_u)}(b_u), \forall u, 1 \leq u \leq p \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u \leq p \\ d_u = \min\{d, niv_{b_u} + 1\}, \forall u, 1 \leq u \leq p \\ b_{u+1} \neq b_u \end{cases}$$

Et les brins de cette suite vérifient :

$$\begin{aligned} b_{u+1} &\in OG_{u(K,a,d)}(b) \text{ pour } 0 \leq u \leq p \text{ et} \\ b_{u+1} &\notin OG_{u-1(K,a,d)}(b) \text{ pour } 1 \leq u \leq p. \end{aligned}$$

5.2 Propriétés

Dans cette partie sont exposées et démontrées différentes propriétés des orbites généralisées. Parmi celles-ci se trouve la propriété indiquant que les orbites généralisées sont des unions d'orbites, ainsi que celle indiquant que deux cellules généralisées sont, sous certaines conditions, distinctes ou confondues.

La proposition 23 permet de prouver que la notion d'orbite généralisée est une généralisation de la notion d'orbite. C'est à dire que pour une pyramide donnée, pour un ensemble d'involutions donné, et pour un brin donné, l'orbite généralisée observée à un niveau (et non pas entre deux niveaux distincts) correspond à l'orbite de ce brin à ce niveau. En d'autres termes, si l'on se place dans le cadre d'une pyramide d'images, cette proposition montre que l'ensemble des régions d'un niveau a correspondant à une région donnée du niveau a , est réduit à cette région elle même.

Proposition 23 : Soit $K \subseteq N$, a tel que $0 \leq a \leq m$, et $b \in B^a$, on a

$$OG_{(K,a,a)}(b) = \langle \rangle_{(K)^a}(b).$$

Preuve : Nous allons montrer dans un premier temps que $OG_{(K,a,a)}(b) \subseteq \langle \rangle_{(K)^a}(b)$, puis que $\langle \rangle_{(K)^a}(b) \subseteq OG_{(K,a,a)}(b)$.

Soit $b' \in OG_{(K,a,a)}(b)$.

Puisque $b' \in OG_{(K,a,a)}(b)$, on sait d'après la remarque 2 qu'il existe une suite de brins $\{b_1, b_2, \dots, b_{p+1}\} \subseteq$

$$OG_{(K,a,a)}(b) \text{ telle que } \begin{cases} b_1 = b \\ b_{p+1} = b' \\ b_{u+1} \in EchE_{(t_u,a,a)}(b_u), \forall u, 1 \leq u \leq p \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u \leq p \\ b_{u+1} \neq b_u \end{cases}$$

Et par définition : $EchE_{(t_u,a,a)}(b_u) = \{b_u, b_u \alpha_{t_u}^a\}$, $\forall u, 1 \leq u \leq p$.

$$\text{D'où il existe } \{b_1, b_2, \dots, b_{p+1}\} \subseteq OG_{(K,a,a)}(b) \text{ tel que } \begin{cases} b_1 = b \\ b_{p+1} = b' \\ b_{u+1} \in \{b_u, b_u \alpha_{t_u}^a\}, \forall u, 1 \leq u \leq p \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u \leq p \end{cases}$$

Puisque l'on suppose $b_{u+1} \neq b_u$, on déduit alors qu'il existe $t_u \in K$, avec $1 \leq u \leq p$, tel que $b' = b \alpha_{t_1}^a \alpha_{t_2}^a \dots \alpha_{t_{p+1}}^a$.

Donc $b' \in \langle \rangle_{(K)^a}(b)$.

Et ceci est vrai quelque soit $b' \in OG_{(K,a,a)}(b)$.

Donc $OG_{(K,a,a)}(b) \subseteq \langle \rangle_{(K)^a}(b)$.

Montrons maintenant que $\langle \rangle_{(K)^a}(b) \subseteq OG_{(K,a,a)}(b)$.

Soit $b' \in \langle \rangle_{(K)^a}(b)$.

$$\text{Il existe alors une suite de brins } \{b_1, \dots, b_{p+1}\} \in \langle \rangle_{(K)^a}(b) \text{ telle que : } \begin{cases} b_1 = b \\ b_{p+1} = b' \\ b_{u+1} = b_u \alpha_{t_u}^a, \forall u, 1 \leq u \leq p \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u \leq p \end{cases}$$

Montrons par récurrence sur u , $1 \leq u \leq p+1$, que $b_u \in OG_{(K,a,a)}(b)$.

– pour $u = 1$ $b_1 = b \in OG_{(K,a,a)}(b)$ par hypothèse. Donc c'est vrai pour $u = 1$.

– supposons l'hypothèse vraie pour u , $1 \leq u < p+1$, et montrons que c'est vrai pour $u+1$.

$b_{u+1} = b_u \alpha_{t_u}^a$ et $EchE_{(t_u,a,a)}(b_u) = \{b_u, b_u \alpha_{t_u}^a\}$. D'où $b_{u+1} \in EchE_{(t_u,a,a)}(b_u)$.

Comme on suppose par hypothèse de récurrence que $b_u \in OG_{(K,a,a)}(b)$, alors $b_{u+1} \in OG_{(K,a,a)}(b)$.

Donc c'est vrai pour $u+1$.

Par conséquent $b_u \in OG_{(K,a,a)}(b)$, $\forall u$, $1 \leq u \leq p+1$.
On a alors $b' \in OG_{(K,a,a)}(b)$. Et ceci est vrai quelque soit $b' \in \langle \rangle_{(K)^a}(b)$.
Donc $\langle \rangle_{(K)^a}(b) \subseteq OG_{(K,a,a)}(b)$.
Par conséquent $OG_{(K,a,a)}(b) = \langle \rangle_{(K)^a}(b)$.

□

La proposition suivante montre que si un brin appartient à une orbite généralisée, alors à chaque niveau, l'orbite contenant ce brin fait partie de cette orbite généralisée. Une orbite généralisée est alors une union d'orbites.

Proposition 24 : Soit $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^d$.

Pour tout $b' \in OG_{(K,a,d)}(b)$, $\langle \rangle_{(K)^\delta}(b') \subseteq OG_{(K,a,d)}(b)$, avec $a \leq \delta \leq \min\{d, \text{niv}_{b'}\}$.

Preuve : Soit $b' \in OG_{(K,a,d)}(b)$ et $b'' \in \langle \rangle_{(K)^\delta}(b')$ avec $a \leq \delta \leq \min\{d, \text{niv}_{b'}\}$.

Montrons que $b'' \in OG_{(K,a,d)}(b)$.

Puisque $b'' \in \langle \rangle_{(K)^\delta}(b')$, il existe $\{b_0, b_1, \dots, b_p\}$ tel que

$$\begin{cases} b_0 = b', \\ b_p = b'', \\ b_{u+1} = b_u \alpha_{t_u}^\delta, \forall u, 0 \leq u < p, \\ t_u \in K, \forall u, 0 \leq u < p. \end{cases}$$

Soit $d_u = \min\{d, \text{niv}_{b_u} + 1\}$, $\forall u$, $0 \leq u \leq p$.

Puisque $\forall u$, $0 \leq u \leq p$, $b_u \in \langle \rangle_{(K)^\delta}(b')$, on a nécessairement $\delta \leq \text{niv}_{b_u}$. En utilisant la proposition 2 page 12 on sait alors que le dernier brin de $Ch_{(t_u,a,\delta)}(b_u)$ est $b_u \alpha_{t_u}^\delta$.

Or par hypothèse $b_u \alpha_{t_u}^\delta = b_{u+1}$, donc b_{u+1} est le dernier brin de $Ch_{(t_u,a,\delta)}(b_u)$.

Et par conséquent $b_{u+1} \in Ech_{(t_u,a,\delta)}(b_u)$.

Puisque $\delta \leq \text{niv}_{b_u}$ et $d_u = \min\{d, \text{niv}_{b_u} + 1\}$, on a $\delta \leq d_u$.

Dans le cas où $\delta = d_u$, on a directement $b_{u+1} \in Ech_{(t_u,a,d_u)}(b_u)$ (ou $b_{u+1} \in EchE_{(t_u,a,d_u)}(b_u)$).

Et dans le cas où $\delta < d_u$, on sait alors par définition (8 page 40) que $ChE_{(t_u,a,d_u-1)}(b_u)$ est l'un des sous chemins (ou le sous chemin) qui composent $ChE_{(t_u,a,d_u)}(b_u)$. Par suite $EchE_{(t_u,a,d_u-1)}(b_u) \subseteq EchE_{(t_u,a,d_u)}(b_u)$. En descendant pas à pas jusqu'à δ on montre que $EchE_{(t_u,a,\delta)}(b_u) \subseteq EchE_{(t_u,a,d_u)}(b_u)$.

Ce qui permet de conclure que $b_{u+1} \in EchE_{(t_u,a,d_u)}(b_u)$.

Il existe alors $\{b_0, b_1, \dots, b_p\}$ tel que

$$\begin{cases} b_0 = b', \\ b_p = b'', \\ b_{u+1} \in Ech_{(t_u,a,d_u)}(b_u), \forall u, 0 \leq u < p, \\ t_u \in K, \forall u, 0 \leq u < p. \end{cases}$$

Par conséquent $b'' \in OG_{(K,a,d)}(b)$ (cf. remarque 2).

Ce que l'on vient de montrer est vrai quelque soit $b'' \in \langle \rangle_{(K)^\delta}(b')$.

Donc $\langle \rangle_{(K)^\delta}(b') \subseteq OG_{(K,a,d)}(b)$.

Or tout ceci est vrai quelque soit $b' \in OG_{(K,a,d)}(b)$.

Par conséquent, pour tout $b' \in OG_{(K,a,d)}(b)$, $\langle \rangle_{(K)^\delta}(b') \subseteq OG_{(K,a,d)}(b)$.

□

La proposition 25 montre que les deux orbites généralisées issues respectivement de deux brins appartenant à une même orbite sont confondues. Ce qui implique que dans le cadre d'une pyramide

d'images, l'ensemble des régions d'un niveau inférieur correspondant à une région d'un niveau donné est le même quelque soit le brin du "bord" de la région initialement choisi pour le calcul.

Proposition 25 : Soit $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b_1, b_2 \in B^d$.
Si $b_2 \in \langle \rangle_{(K)^d}(b_1)$ alors $OG_{(K,a,d)}(b_1) = OG_{(K,a,d)}(b_2)$.

Preuve : Puisque $b_1 \in OG_{(K,a,d)}(b_1)$ et $b_1 \in B^d$ alors d'après la proposition 24 page 59, on a $\langle \rangle_{(K)^d}(b_1) \subseteq OG_{(K,a,d)}(b_1)$.

D'où si $b_2 \in \langle \rangle_{(K)^d}(b_1)$ alors $b_2 \in OG_{(K,a,d)}(b_1)$.

Suite à la définition de $OG_{(K,a,d)}(b_2)$ on a alors $OG_{(K,a,d)}(b_2) \subseteq OG_{(K,a,d)}(b_1)$.

D'autre part dire que $b_2 \in \langle \rangle_{(K)^d}(b_1)$ est équivalent à dire que $b_1 \in \langle \rangle_{(K)^d}(b_2)$.

On obtient alors de la même manière : $OG_{(K,a,d)}(b_1) \subseteq OG_{(K,a,d)}(b_2)$.

Donc si $b_2 \in \langle \rangle_{(K)^d}(b_1)$ alors $OG_{(K,a,d)}(b_2) = OG_{(K,a,d)}(b_1)$.

□

La proposition 26 indique que l'orbite généralisée d'un brin observée entre deux niveaux a et d contient l'orbite généralisée du même brin observée entre les niveaux a et $d-1$. Plaçons nous dans le cadre d'une pyramide d'images, et prenons deux régions R_1 et R_2 situées respectivement aux niveaux $d-1$ et d de la pyramide et contenant toutes deux le brin b . On sait déjà par la proposition 24 que R_1 est incluses dans R_2 . La proposition 26 ajoute une information supplémentaire : l'ensemble des régions du niveau a correspondant à R_1 est inclus dans l'ensemble des régions du niveau a correspondant à R_2 .

Proposition 26 : Soit $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a < d \leq m$, et $b \in B^d$, on a
 $OG_{(K,a,d-1)}(b) \subseteq OG_{(K,a,d)}(b)$.

Preuve : Soit $b' \in OG_{(K,a,d-1)}(b)$.

D'après la remarque 2 page 57 il existe une suite de brins $\{b_1, b_2, \dots, b_{p+1}\} \subseteq OG_{(K,a,d-1)}(b)$ telle que

$$\begin{cases} b_1 = b \\ b_{p+1} = b' \\ b_{u+1} \in EchE_{(t_u, a, \min\{d-1, niv_{b_u}+1\})}(b_u), \forall u, 1 \leq u \leq p \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u \leq p \end{cases}$$

Par définition on sait que

- $EchE_{(i,a,d)}(b) = Ech_{(i,a,d)}(b)$ pour $b \in B^d$ (définition 8 page 40) ;
- $Ech_{(i,a,d)}(b)$ est l'ensemble de brins du chemin de connection $Ch_{(i,a,d)}(b)$, y compris ses deux extrémités (définition 7 page 23) ;
- $Ch_{(i,a,d)}(b) = Ch_{(i,a,d-1)}(b)$ pour $b \in B^d - BS_i^{d-1}$,
et $Ch_{(i,a,d)}(b) = C = \left(Ch_{(k_1,a,d-1)}(b_1), Ch_{(k_2,a,d-1)}(b_2), \dots, Ch_{(k_p,a,d-1)}(b_p) \right)$ pour $b \in BS_i^{d-1}$, avec entre autre $b_1 = b$ et $k_1 = i$ (définition 5 page 11).

On déduit alors de ces trois définitions que $EchE_{(i,a,d-1)}(b) \subseteq EchE_{(i,a,d)}(b)$, pour $a < d$ et $b \in B^d$.

D'autre part on a $\min\{d, niv_{b_u} + 1\} = \min\{d-1, niv_{b_u} + 1\}$

$$\text{ou } \min\{d, niv_{b_u} + 1\} = \min\{d-1, niv_{b_u} + 1\} + 1.$$

Donc $EchE_{(t_u, a, \min\{d-1, niv_{b_u}+1\})}(b_u) \subseteq EchE_{(t_u, a, \min\{d, niv_{b_u}+1\})}(b_u)$, $\forall u, 1 \leq u \leq p$.

Et par conséquent $b' \in OG_{(K,a,d)}(b)$.

Et ceci est vrai quelque soit $b' \in OG_{(K,a,d-1)}(b)$.

Donc $OG_{(K,a,d-1)}(b) \subseteq OG_{(K,a,d)}(b)$.

□

La proposition 27 montre que pour une orbite donnée au niveau d , les brins qui composent les orbites du niveau $d - 1$ correspondant à celle-ci font également partie de ceux qui composent les orbites du niveau a lui correspondant également.

Proposition 27 : Soit $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $b \in B^d$, on a

$$OG_{(K,d-1,d)}(b) \subseteq OG_{(K,a,d)}(b).$$

Preuve : Soit $b' \in OG_{(K,d-1,d)}(b)$.

D'après la remarque 2 il existe une suite de brins $\{b_1, b_2, \dots, b_{p+1}\} \subseteq OG_{(K,d-1,d)}(b)$ (ce qui implique $b_u \in B^{d-1}$ pour $1 \leq u \leq p+1$) telle que

$$\begin{cases} b_1 = b \\ b_{p+1} = b' \\ b_{u+1} \in EchE_{(t_u, d-1, \min\{d, niv_{b_u}+1\})}(b_u), \forall u, 1 \leq u \leq p \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u \leq p \end{cases}$$

Or $\min\{d, niv_{b_u} + 1\} = d$ car $b_u \in B^{d-1}$ au moins selon la définition.

D'où $EchE_{(t_u, d-1, \min\{d, niv_{b_u}+1\})}(b_u) = EchE_{(t_u, d-1, d)}(b_u)$.

D'après la proposition 17 page 47 on sait que $EchE_{(i, d-1, d)}(b) \subseteq EchE_{(i, a, d)}(b)$, pour $a < d$ et $b \in B^d$.

D'où $EchE_{(t_u, d-1, d)}(b_u) \subseteq EchE_{(t_u, a, d)}(b_u)$, $\forall u, 1 \leq u \leq p$.

Or nous avons dit que $\min\{d, niv_{b_u} + 1\} = d$, d'où $\forall u, 1 \leq u \leq p$:

$$EchE_{(t_u, d-1, \min\{d, niv_{b_u}+1\})}(b_u) \subseteq EchE_{(t_u, a, \min\{d, niv_{b_u}+1\})}(b_u).$$

Et donc par conséquent $b' \in OG_{(K,a,d)}(b)$.

Comme ceci est vrai quelque soit $b' \in OG_{(K,d-1,d)}(b)$, on en conclut que $OG_{(K,d-1,d)}(b) \subseteq OG_{(K,a,d)}(b)$.

□

Dans le but de montrer que les cellules généralisées sont, sous certaines contraintes, confondues ou alors disjointes (proposition 32), nous avons besoin de démontrer que si un brin b' contenu dans un chemin, appartient à une cellule généralisée, alors l'extrémité initiale de ce chemin b appartient également à cette cellule généralisée (proposition 31).

L'idée de cette dernière démonstration est d'extraire une suite de brins de ce chemin reliant b et b' (cette partie est effectuée à l'aide de la proposition 29), puis de montrer que chaque brin de cette suite appartient à la cellule généralisée considérée.

L'idée de la proposition 29 est de montrer qu'il existe une suite de brins partant de b' , allant vers b , telle que chaque brin de cette suite soit dernier brin d'un certain chemin issu du brin précédent. De cette manière on pourra utiliser le fait que le dernier brin d'un chemin est le voisin pour une certaine involution du brin initial (proposition 2) et ainsi mettre en relation chaque élément de cette suite avec l'élément précédent ou suivant par une involution.

Pour cela on sait que b' appartient au chemin issu de b . Comme par définition, un chemin de connection est une concaténation de sous-chemins, il existe alors un sous-chemin de cette concaténation contenant b' , et ainsi de suite. D'où en prenant tous les brins de départ de chemin contenant b' et inclus dans les chemins des éléments précédents on obtient une première suite (une suite d'ensembles connectants fermés "gigogne" (suite de la proposition 28), voir figure 16 c- page 62).

Comme on veut aboutir à une suite dont chaque élément est dernier brin d'un chemin issu de l'élément précédent, on ne considère plus seulement les brins points de départ de chemins contenant b' mais cette fois tous les brins extrémités initiales de sous-chemins entre b et b' (voir figure 16 d-).

La proposition 28, montre que la suite $(b_{d''})_{l \leq d'' \leq d'}$ est bien une suite d'ensembles connectants fermés "gigogne" contenant b' et contenu dans l'ensemble issu du chemin initialement considéré.



62

Proposition 28 : Soit $i \in N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Soit $b \in B^a$ tel que $EchE_{(i,a,\min\{d,niv_b+1\})}^\circ(b) \neq \emptyset$.

Soit $b' \in EchE_{(i,a,\min\{d,niv_b+1\})}^\circ(b)$.

Soit $d' = \min\{d, niv_b + 1\}$ et $l = niv_{b'}$.

Soit la suite de brins $(b_{d''})_{l \leq d'' \leq d'}$, où $b_{d''} \in EchE_{(i,a,d')}^\circ(b) \cup \{b\} \forall d'', l \leq d'' \leq d'$, définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} b_{d'} = b, \text{ et } t_{d'} = i; \\ \text{et pour } l \leq d'' < d' \text{ on définit respectivement } b_{d''} \text{ et } t_{d''} \text{ en fonction de } b_{d''+1} \text{ et } t_{d''+1} : \\ \quad \text{si } b_{d''+1} \notin (BS_{t_{d''+1}}^{d''} \cup S_{t_{d''+1}}^{d''} \cup C_{t_{d''+1}}^{d''}) \text{ alors } b_{d''} = b_{d''+1} \text{ et } t_{d''} = t_{d''+1}; \\ \quad \text{sinon, soit } ChE_{(t_{d''+1},a,d''+1)}(b_{d''+1}) = (ChE_{(k_1,a,d'')}(b'_1), \dots, ChE_{(k_p,a,d'')}(b'_p)) \\ \quad \text{avec } p, k_1, \dots, k_p, b'_1, \dots, b'_p \text{ vérifiant les conditions de la définition 8 page 40,} \\ \quad \text{et } j \in \{1, \dots, p\} \text{ tel que } b' \in EchE_{(k_j,a,d'')}(b'_j), \text{ alors } b_{d''} = b'_j \text{ et } t_{d''} = k_j; \\ \quad \text{et } l \text{ est tel que } b' = \text{dernier brin de } Ch_{(t_l,a,l)}(b_l); \end{array} \right.$$

Cette suite est telle que $\forall d'', l \leq d'' \leq d' \left\{ \begin{array}{l} b' \in EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}), \\ \text{et } EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) \subseteq EchE_{(i,a,d')}(b), \end{array} \right.$
et b' est le dernier brin de $Ch_{(t_l,a,l)}(b_l)$.

Preuve : Montrons par récurrence décroissante sur $d'', l \leq d'' \leq d'$, que $b' \in EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''})$ et $EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) \subseteq EchE_{(i,a,d')}(b)$.

– pour $d'' = d'$:

on a $b_{d'} = b$ et $t_{d'} = i$ d'où $EchE_{(t_{d'},a,d')}(b_{d'}) = EchE_{(i,a,d')}(b)$.

Et par hypothèse on a $b' \in EchE_{(i,a,d')}(b)$.

Donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang d' .

– supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour $d'', l < d'' \leq d'$, et montrons qu'elle est vraie pour $d'' - 1$:

Si $b_{d''} \notin (BS_{t_{d''}}^{d''-1} \cup S_{t_{d''}}^{d''-1} \cup C_{t_{d''}}^{d''-1})$, on a par définition (def 8 page 40) :

$$EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) = EchE_{(t_{d''),a,d''-1}}(b_{d''}).$$

Puisque dans ce cas on suppose $b_{d''-1} = b_{d''}$ et $t_{d''-1} = t_{d''}$, on a alors

$$EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) = EchE_{(t_{d''-1},a,d''-1)}(b_{d''-1}).$$

Par hypothèse de récurrence on sait que

$$b' \in EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) \text{ et } EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) \subseteq EchE_{(i,a,d')}(b).$$

Donc dans ce cas, $b' \in EchE_{(t_{d''-1},a,d''-1)}(b_{d''-1})$ et $EchE_{(t_{d''-1},a,d''-1)}(b_{d''-1}) \subseteq EchE_{(i,a,d')}(b)$.

Si $b_{d''} \in (BS_{t_{d''}}^{d''-1} \cup S_{t_{d''}}^{d''-1} \cup C_{t_{d''}}^{d''-1})$, on a par définition (def 8 page 40) :

$$ChE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) = (ChE_{(k_1,a,d''-1)}(b'_1), \dots, ChE_{(k_p,a,d''-1)}(b'_p))$$

avec $p, k_1, \dots, k_p, b'_1, \dots, b'_p$ vérifiant les conditions de cette définition.

Par hypothèse de récurrence on sait que $b' \in EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''})$.

Il existe alors $j, 1 \leq j \leq p$, tel que $b' \in EchE_{(k_j,a,d''-1)}(b'_j)$.

Or par définition de la suite on sait que $b_{d''-1} = b'_j$ et $t_{d''-1} = k_j$.

Par conséquent

$$b' \in EchE_{(t_{d''-1},a,d''-1)}(b_{d''-1}) \text{ et } EchE_{(t_{d''-1},a,d''-1)}(b_{d''-1}) \subseteq EchE_{(i,a,d')}(b_{d''}).$$

Puisque l'on suppose $EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) \subseteq EchE_{(i,a,d')}(b)$,

on a donc $EchE_{(t_{d''-1},a,d''-1)}(b_{d''-1}) \subseteq EchE_{(i,a,d')}(b)$.

L'hypothèse de récurrence est donc vraie au rang $d'' - 1$.

Donc pour tout $d'', l \leq d'' \leq d', b' \in EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''})$,
et $EchE_{(t_{d''),a,d''}}(b_{d''}) \subseteq EchE_{(i,a,d')}(b), \forall d'', l \leq d'' \leq d'$.

Reste à montrer que b' est le dernier brin de $Ch_{(t_l, a, l)}(b_l)$.

Par définition on a $l = niv_{b'}$, et d'après ce que l'on vient de montrer, $b' \in EchE_{(t_l, a, l)}(b_l)$.

D'après les propositions 20 page 50 et 21 page 51, on sait que les brins de $EchE_{(t_l, a, l)}^\circ(b_l)$ sont des brins qui ont disparu avant le niveau l , seul le dernier brin de $ChE_{(t_l, a, l)}(b_l)$ appartient au niveau l (et à $EchE_{(t_l, a, l)}(b_l)$).

Donc b' est le dernier brin de $Ch_{(t_l, a, l)}(b_l)$.

□

Remarque 3 : $b_{d''} \in B^{d''}$, $\forall d''$, $l \leq d'' < d'$.

La proposition 29 montre que l'on peut extraire de l'ensemble connectant issu du chemin de connection considéré, une suite de brins reliant l'origine de ce chemin et un brin de celui-ci, et tels que chaque brin de la suite est dernier brin d'un chemin issu du brin suivant.

Proposition 29 : Soit $i \in N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$.

Soit $b \in B^a$ tel que $EchE_{(i, a, \min\{d, niv_b+1\})}^\circ(b) \neq \emptyset$.

Soit $b' \in EchE_{(i, a, \min\{d, niv_b+1\})}^\circ(b)$.

Soit $d' = \min\{d, niv_b + 1\}$ et $l = niv_{b'}$.

Il existe alors une suite de brins $\{\beta_0, \dots, \beta_q\}$ de $EchE_{(i, a, d')}^\circ(b) \cup \{b\}$ telle que

$$\begin{cases} \beta_0 = b, \tau_0 = i; \\ \beta_q = b', \tau_{q-1} = t_l, \delta_q = l; \\ \beta_{u-1} = \text{dernier brin de } Ch_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u), \forall u, 0 < u \leq q; \\ \tau_{u-1} = \begin{cases} \tau_u - 1 & \text{si } \beta_u \in (S_{\tau_u-1}^{\delta_u} \cup C_{\tau_u}^{\delta_u}) \\ \tau_u + 1 & \text{si } \beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{\delta_u} \cup S_{\tau_u}^{\delta_u}) \end{cases}, \forall u, 0 < u < q; \\ \delta_u = niv_{\beta_u}, \forall u, 0 < u \leq q; \end{cases}$$

où t_l est issue de la définition de la suite $(b_{d''})_{l \leq d'' \leq d'}$ définie dans la proposition 28.

Preuve : Puisque les hypothèses de cette proposition sont les mêmes que celles de la proposition 28, on sait par cette dernière que la suite $(b_{d''})_{l \leq d'' \leq d'}$ définie par

$$\begin{cases} b_{d'} = b, \text{ et } t_{d'} = i; \\ \text{et pour } l \leq d'' < d', b_{d''} \text{ et } t_{d''} \text{ sont respectivement définis en fonction de } b_{d''+1} \text{ et } t_{d''+1} : \\ \quad \text{si } b_{d''+1} \notin (BS_{t_{d''+1}}^{d''} \cup S_{t_{d''+1}}^{d''} \cup C_{t_{d''+1}}^{d''}) \text{ alors } b_{d''} = b_{d''+1} \text{ et } t_{d''} = t_{d''+1}; \\ \quad \text{sinon, soit } ChE_{(t_{d''+1}, a, d''+1)}(b_{d''+1}) = (ChE_{(k_1, a, d'')}(b'_1), \dots, ChE_{(k_p, a, d'')}(b'_p)) \\ \quad \text{avec } p, k_1, \dots, k_p, b'_1, \dots, b'_p \text{ vérifiant les conditions de la définition 8 page 40,} \\ \quad \text{et } j \in \{1, \dots, p\} \text{ tel que } b'_j \in EchE_{(k_j, a, d'')}(b'_j), \text{ alors } b_{d''} = b'_j \text{ et } t_{d''} = k_j; \end{cases}$$

est telle que $\forall d'', l \leq d'' \leq d' \begin{cases} b' \in EchE_{(t_{d''), a, d''}}(b_{d''}), \\ \text{et } EchE_{(t_{d''), a, d''}}(b_{d''}) \subseteq EchE_{(i, a, d')}(b), \end{cases}$
et b' est le dernier brin de $Ch_{(t_l, a, l)}(b_l)$.

Montrons par récurrence sur d'' , $l \leq d'' \leq d'$, qu'il existe une suite de brins $(\beta_0, \dots, \beta_q)$ de $EchE_{(t_{d''), a, d''}}(b_{d''})$ telle que :

$$\begin{cases} \beta_0 = b_{d''}, \tau_0 = t_{d''}, \\ \beta_q = b', \tau_{q-1} = t_l, \delta_q = l \\ \beta_{u-1} = \text{dernier brin de } ChE_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u), \forall u, 0 < u \leq q, \\ \tau_{u-1} = \begin{cases} \tau_u - 1 & \text{si } \beta_u \in (S_{\tau_u-1}^{\delta_u} \cup C_{\tau_u}^{\delta_u}) \\ \tau_u + 1 & \text{si } \beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{\delta_u} \cup S_{\tau_u}^{\delta_u}) \end{cases}, \forall u, 0 < u < q, \\ \delta_u = niv_{\beta_u}, \forall u, 0 < u \leq q. \end{cases}$$

- pour $d'' = l$:
 Prenons $\beta_0 = b_l$, $\tau_0 = t_l$, $\beta_1 = b'$, $\delta_1 = l$ et $q = 1$.
 On a :
 – par définition de la suite $(b_{d''})_{l \leq d'' \leq d'}$, on a b' dernier brin de $ChE_{(t_l, a, l)}(b_l)$ avec $b_l \in B^l$.
 D'où par définition des chemins de connection on a $ChE_{(t_l, a, l)}(b_l) = Ch_{(t_l, a, l)}(b_l)$, et par la proposition 2 page 12 on a $b' = b_l \alpha_{t_l}^l$. Par cette proposition on a également dernier brin de $Ch_{(t_l, a, l)}(b') = b' \alpha_{t_l}^l = b_l$.
 Donc on a bien $\beta_0 =$ dernier brin de $Ch_{(\tau_0, a, \delta_1)}(\beta_1)$
- $\delta_1 = l = niv_{b'} = niv_{\beta_1}$
 Donc pour $d'' = l$ l'hypothèse de récurrence est vérifiée.
- supposons l'hypothèse vraie pour d'' , $l \leq d'' < d'$, et montrons qu'elle est vraie pour $d'' + 1$:
 D'après la proposition 28 page 63 on sait que $b' \in EchE_{(t_{d''}, a, d'')}(b_{d''}) \subseteq EchE_{(t_{d''+1}, a, d''+1)}(b_{d''+1})$.
 Par définition on sait que si $b_{d''+1} \notin (BS_{t_{d''+1}}^{d''} \cup S_{t_{d''+1}}^{d''} \cup C_{t_{d''+1}}^{d''})$ alors

$$ChE_{(t_{d''+1}, a, d''+1)}(b_{d''+1}) = ChE_{(t_{d''+1}, a, d'')}(b_{d''+1}),$$

et sinon

$$ChE_{(t_{d''+1}, a, d''+1)}(b_{d''+1}) = \left(ChE_{(k_1, a, d'')}(b'_1), \dots, ChE_{(k_p, a, d'')}(b'_p) \right)$$

avec $b'_1, \dots, b'_p$ et $k_1, \dots, k_p$ vérifiant les conditions de la définition récursive des chemins de connection.

Par conséquent si $b_{d''+1} \notin (BS_{t_{d''+1}}^{d''} \cup S_{t_{d''+1}}^{d''} \cup C_{t_{d''+1}}^{d''})$ alors

$$ChE_{(t_{d''}, a, d'')}(b_{d''}) = ChE_{(t_{d''+1}, a, d'')}(b_{d''+1}),$$

et sinon il existe j , $1 \leq j \leq p$ tel que

$$ChE_{(t_{d''}, a, d'')}(b_{d''}) = ChE_{(k_j, a, d'')}(b'_j).$$

Puisque l'on suppose l'hypothèse de récurrence vraie au rang d'' , il existe une suite de brins $(\beta'_0, \dots, \beta'_q)$ de $EchE_{(t_{d''}, a, d'')}(b_{d''})$ telle que :

$$\begin{cases} \beta_0 = b_{d''}, \tau_0 = t_{d''}; \\ \beta_q = b', \tau_{q-1} = t_l, \delta_q = l; \\ \beta_{u-1} = \text{dernier brin de } Ch_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u), \forall u, 0 < u \leq q; \\ \tau_{u-1} = \begin{cases} \tau_u - 1 & \text{si } \beta_u \in (S_{\tau_u-1}^{\delta_u} \cup C_{\tau_u}^{\delta_u}) \\ \tau_u + 1 & \text{si } \beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{\delta_u} \cup S_{\tau_u}^{\delta_u}) \end{cases}, \forall u, 0 < u < q; \\ \delta_u = niv_{\beta_u}, \forall u, 0 < u \leq q; \end{cases}$$

Si $b_{d''+1} \notin (BS_{t_{d''+1}}^{d''} \cup S_{t_{d''+1}}^{d''} \cup C_{t_{d''+1}}^{d''})$ alors en prenant

$$\begin{cases} \beta_0 = \beta'_0; \\ \beta_1 = \beta'_1, \quad \tau_0 = \tau'_0, \quad \delta_1 = \delta'_1; \\ \vdots \\ \beta_q = \beta'_q, \quad \tau_{q-1} = \tau'_{q-1}, \quad \delta_q = \delta'_q; \end{cases}$$

on a une suite répondant aux conditions.

Si $b_{d''+1} \in (BS_{t_{d''+1}}^{d''} \cup S_{t_{d''+1}}^{d''} \cup C_{t_{d''+1}}^{d''})$ alors prenons :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \beta_0 = b'_1; & & \\ \beta_1 = b'_2, & \tau_0 = k_1, & \delta_1 = d''; \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{j-1} = b'_j = \beta'_0, & \tau_{j-2} = k_{j-1}, & \delta_{j-1} = d''; \\ \beta_j = \beta'_1, & \tau_{j-1} = \tau'_0, & \delta_j = \delta'_1; \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{j+q-1} = \beta'_q, & \tau_{j+q-2} = \tau'_{q-1}, & \delta_{j+q-1} = \delta'_q. \end{array} \right.$$

Regardons si cette suite vérifie les conditions fixées :

- les conditions sont bien vérifiées pour β_u , τ_{u-1} et δ_u avec u tel que $j \leq u \leq j+q-1$;
- la condition concernant β_0 est vérifiée car $\beta_0 = b'_1 = b_{d''+1}$;
- la relation $\beta_{u-1} = \text{dernier brin de } Ch_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u)$ est elle vérifiée pour tout u , $0 < u \leq j-1$:

on sait que $b'_{u+1} = \text{dernier brin de } Ch_{(k_u, a, d'')}(b'_u)$ et $b'_u \in B^{d''}$ pour $1 \leq u < j$. Donc en appliquant la proposition 2 page 12 $b'_{u+1} = b'_u \alpha_{k_u}^{d''}$ et dernier brin de $Ch_{(k_u, a, d'')}(b'_{u+1}) = b'_{u+1} \alpha_{k_u}^{d''} = b'_u$. Puisque $\tau_{u-1} = k_u$, $\delta_u = d''$, $\beta_u = b'_{u+1}$ et $\beta_{u-1} = b'_u$ pour $1 \leq u \leq j$ alors dernier brin de $Ch_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u) = \beta_{u-1}$.

Et donc cette condition est vérifiée.

- la relation entre τ_{u-1} et τ_u est elle vérifiée pour tout u , $0 < u \leq j-1$:

Par définition (def 5 page 11) on sait que : $k_u = \begin{cases} t_{d''+1} & \text{si } u \text{ est impair,} \\ t_{d''+1} + 1 & \text{si } u \text{ est pair et } b'_u \in S_{t_{d''+1}}^{niv_{b'_u}}, \\ t_{d''+1} - 1 & \text{si } u \text{ est pair et } b'_u \in C_{t_{d''+1}}^{niv_{b'_u}}. \end{cases}$

D'où : $k_{u+1} = \begin{cases} k_u + 1 & \text{si } b'_{u+1} \in (S_{k_{u+1}-1}^{niv_{b'_{u+1}}} \cup C_{k_{u+1}}^{niv_{b'_{u+1}}}), \\ k_u - 1 & \text{si } b'_{u+1} \in (C_{k_{u+1}+1}^{niv_{b'_{u+1}}} \cup S_{k_{u+1}}^{niv_{b'_{u+1}}}). \end{cases}$

Ce qui entraîne : $\tau_u = \begin{cases} \tau_{u-1} + 1 & \text{si } \beta_u \in (S_{\tau_{u-1}-1}^{niv_{\beta_u}} \cup C_{\tau_u}^{niv_{\beta_u}}), \\ \tau_{u-1} - 1 & \text{si } \beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{niv_{\beta_u}} \cup S_{\tau_u}^{niv_{\beta_u}}). \end{cases}$

C'est à dire : $\tau_{u-1} = \begin{cases} \tau_u - 1 & \text{si } \beta_u \in (S_{\tau_{u-1}-1}^{niv_{\beta_u}} \cup C_{\tau_u}^{niv_{\beta_u}}), \\ \tau_u + 1 & \text{si } \beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{niv_{\beta_u}} \cup S_{\tau_u}^{niv_{\beta_u}}). \end{cases}$

Et ceci est vrai quelque soit u , $1 \leq u < j$.

Donc la relation entre τ_{u-1} et τ_u est vérifiée pour $1 \leq u < j$.

- la condition concernant δ_u , $1 \leq u < j$ est vérifiée car $\delta_u = d''$ et $\beta_u = b'_u + 1 \in B^{d''}$ par définition.

Donc cette suite vérifie toutes les conditions fixées.

Par conséquent l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $d'' + 1$.

Donc pour tout d'' , $a \leq d'' \leq d'$, il existe une suite de brins $(\beta_0, \dots, \beta_q)$ de $EchE_{(t_{d''}, a, d'')}(b_{d''})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = b_{d''}, \tau_0 = t_{d''}, \\ \beta_q = b', \tau_{q-1} = t_l, \delta_q = l \\ \beta_{u-1} = \text{dernier brin de } ChE_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u), \forall u, 0 < u \leq q, \\ \tau_{u-1} = \begin{cases} \tau_u - 1 & \text{si } \beta_u \in (S_{\tau_{u-1}-1}^{\delta_u} \cup C_{\tau_u}^{\delta_u}) \\ \tau_u + 1 & \text{si } \beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{\delta_u} \cup S_{\tau_u}^{\delta_u}) \end{cases}, \forall u, 0 < u < q, \\ \delta_u = niv_{\beta_u}, \forall u, 0 < u \leq q. \end{array} \right.$$

Par conséquent il existe une suite de brins $(\beta_0, \dots, \beta_q)$ de $EchE_{(i, a, d')}(b)$ telle que :

$$\begin{cases} \beta_0 = b, \tau_0 = i; \\ \beta_q = b', \tau_{q-1} = t_l, \delta_q = l; \\ \beta_{u-1} = \text{dernier brin de } Ch_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u), \forall u, 0 < u \leq q; \\ \tau_{u-1} = \begin{cases} \tau_u - 1 & \text{si } \beta_u \in (S_{\tau_u-1}^{\delta_u} \cup C_{\tau_u}^{\delta_u}) \\ \tau_u + 1 & \text{si } \beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{\delta_u} \cup S_{\tau_u}^{\delta_u}) \end{cases}, \forall u, 0 < u < q; \\ \delta_u = niv_{\beta_u}, \forall u, 0 < u \leq q; \end{cases}$$

□

Remarque 4 : On a (suite à cette démonstration) :

- $\beta_{u-1} = \beta_u \alpha_{\tau_{u-1}}^{\delta_u}, \forall u, 0 < u \leq q;$
- $Ech_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u) \subseteq EchE_{(i, a, \min\{d, niv_b+1\})}(b), \forall u, 0 < u \leq q;$
- $\delta_u < d'$ pour $0 < u \leq q$ (déduit du fait que $\delta_u = niv_{\beta_u}$ et $\beta_u \in EchE_{(i, a, \min\{d, niv_b+1\})}^\circ(b)$ pour $0 < u \leq q$ ainsi que de la proposition 21).

la proposition 30 montre que l'orbite généralisée d'un brin appartenant à une orbite généralisée est incluse dans cette dernière. Dans le cadre d'une pyramide d'images, cela implique que si l'on prend une région R_1 d'un niveau donné ainsi qu'une région R_2 d'un niveau inférieur faisant partie des régions composant R_1 . A un niveau encore plus bas, l'ensemble des régions composant R_1 comprend les régions composant R_2 .

Proposition 30 : Soit $K \subseteq N$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, $br_1 \in B^d$, et $br_2 \in OG_{(K, a, d)}(br_1)$.
On a alors $OG_{(K, a, \delta)}(br_2) \subseteq OG_{(K, a, d)}(br_1)$
avec $a \leq \delta \leq \min\{d, niv_{br_2}\}$.

Preuve : Soit $b \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$ et montrons que $b \in OG_{(K, a, d)}(br_1)$.

Puisque $b \in OG_{(K, a, \delta)}(br_2)$, on sait par la remarque 2 page 57 qu'il existe une suite de brins $(b_1, \dots, b_p)$ minimale telle que :

$$\begin{cases} b_1 = br_2, \\ b_p = b, \\ b_{u+1} \in EchE_{(t_u, a, d_u)}(b_u), \forall u, 1 \leq u < p, \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u < p, \\ d_u = \min\{\delta, niv_{b_u} + 1\}, \forall u, 1 \leq u < p. \end{cases}$$

Puisque l'on prend la suite minimale on a :

$$\begin{cases} b_u \in OG_{u(K, a, \delta)}(br_2), \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ b_u \notin OG_{u-1(K, a, \delta)}(br_2), \forall u, 1 < u \leq p, \\ b_{u+1} \neq b_u, \forall u, 1 \leq u < p \end{cases}$$

D'autre part, puisque $br_2 \in OG_{(K, a, d)}(br_1)$, on sait par la remarque 2 page 57 qu'il existe une suite de brins $(b'_1, \dots, b'_q)$ minimale telle que :

$$\begin{cases} b'_1 = br_1, \\ b'_q = br_2, \\ b'_{v+1} \in EchE_{(t'_v, a, d'_v)}(b'_v), \forall v, 1 \leq v < q, \\ t'_v \in K, \forall v, 1 \leq v < q, \\ d'_v = \min\{d, niv_{b'_v} + 1\}, \forall v, 1 \leq v < q. \end{cases}$$

Pour montrer que $b \in OG_{(K, a, d)}(br_1)$, il suffit de montrer qu'il existe une suite reliant b et br_1 (cf remarque 2). Pour cela, nous allons utiliser les deux suites précédentes reliant b à br_2 et br_2 à br_1 .

$$\text{On a } \begin{cases} b_{u+1} \in EchE_{(t_u, a, d_u)}(b_u), \forall u, 1 \leq u < p, \\ d_u = \min\{\delta, niv_{b_u} + 1\}, \forall u, 1 \leq u < p, \\ \delta \leq \min\{d, niv_{br_2}\}. \end{cases}$$

D'où : $d_u \leq \min\{d, \text{niv}_{br_2}, \text{niv}_{b_u} + 1\} \leq \min\{d, \text{niv}_{b_u} + 1\}$.

Suite à la définition récursive des chemins de connection étendus (def 8 page 40), on sait que $EchE_{(i,a,d-1)}(b) \subseteq EchE_{(i,a,d)}(b)$ et par suite $EchE_{(i,a,c)}(b) \subseteq EchE_{(i,a,d)}(b)$ pour tout $c, a \leq c \leq d$.

Par conséquent $EchE_{(t_u,a,d_u)}(b_u) \subseteq EchE_{(t_u,a,d''_u)}(b_u)$ avec $d''_u = \min\{d, \text{niv}_{b_u} + 1\}$ pour tout $u, 1 \leq u < p$.

Ce qui implique que la suite de brins $(b_1, \dots, b_p)$ reliant b à br_2 est telle que :

$$\begin{cases} b_1 = br_2, \\ b_p = b, \\ b_{u+1} \in EchE_{(t_u,a,d''_u)}(b_u), \forall u, 1 \leq u < p, \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u < p, \\ d''_u = \min\{d, \text{niv}_{b_u} + 1\}, \forall u, 1 \leq u < p. \end{cases}$$

En prenant la suite $(\beta_1, \dots, \beta_{q+p-1})$ telle que :

$$\begin{cases} \beta_1 = b'_1 = br_1, \\ \beta_q = b'_q = b_1 = br_2, \\ \beta_{q+p-1} = b_p = b, \\ \beta_{w+1} \in EchE_{(\tau_w,a,\delta_w)}(\beta_w), \forall w, 1 \leq w < q+p, \\ \tau_w = \begin{cases} t'_w, & \text{pour } w, 1 \leq w < q, \\ t_{w-q+1}, & \text{pour } w, q \leq w < q+p-1, \end{cases} \\ \text{on a alors bien } \tau_w \in K, \forall w, 1 \leq w < q+p-1, \\ \delta_w = \begin{cases} d'_w, & \text{pour } w, 1 \leq w < q, \\ d''_{w-q+1}, & \text{pour } w, q \leq w < q+p-1, \end{cases} \\ \text{on a alors bien } \tau_w = \min\{d, \text{niv}_{\beta_w} + 1\}, \forall w, 1 \leq w < q+p-1. \end{cases}$$

Par conséquent $b \in OG_{(K,a,d)}(br_1)$.

Puisque cette démonstration est vraie quelque soit $b \in OG_{(K,a,\delta)}(br_2)$, alors

$$OG_{(K,a,\delta)}(br_2) \subseteq OG_{(K,a,d)}(br_1).$$

□

En supposant que aucune suppression ou contraction de i -cellule n'est intervenue lors de la construction de la pyramide, la proposition 31 montre que si un brin b' contenu à l'intérieur d'un chemin appartient à une i -cellule généralisée, alors l'extrémité b de ce chemin appartient à la même i -cellule généralisée.

Afin de le démontrer, on extrait de l'intérieur du chemin une suite de brins (définie dans la proposition 29) reliant b et b' , telle que chaque brin de celle-ci soit dernier brin d'un chemin issu du brin suivant.

Puis on montre que chaque brin de la suite appartient à la cellule en montrant que chaque brin de cette suite est contenu dans un chemin de connection dont le brin initial appartient à la cellule.

Proposition 31 : Soit $i \in N$, $K = N - \{i\}$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, $j \in K$, et $br \in B^d$. On considère que la pyramide P ne contient pas de i -suppression ni de i -contraction entre les niveaux a et d .

Soit $b \in B^a$ tel que $EchE_{(j,a,d')}^\circ(b) \neq \emptyset$.

Soit $d' = \min\{d, \text{niv}_b + 1\}$ et $b' \in EchE_{(j,a,d')}^\circ(b)$.

Si $b' \in OG_{(K,a,d)}(br)$ alors b aussi.

Preuve : Supposons $b' \in OG_{(K,a,d)}(br)$.

Puisque $b' \in EchE_{(j,a,d')}^\circ(b)$, alors d'après la proposition 29 page 64, il existe une suite de brins $\{\beta_0, \dots, \beta_p\} \subseteq EchE_{(j,a,d')}^\circ(b) \cup \{b\}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = b, \tau_0 = j; \\ \beta_p = b', \tau_{p-1} = t_l, \delta_p = l; \\ \beta_{u-1} = \text{dernier brin de } Ch_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u), \forall u, 0 < u \leq p; \\ \tau_{u-1} = \begin{cases} \tau_u - 1 & \text{si } \beta_u \in (S_{\tau_u-1}^{\delta_u} \cup C_{\tau_u}^{\delta_u}) \\ \tau_u + 1 & \text{si } \beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{\delta_u} \cup S_{\tau_u}^{\delta_u}) \end{cases}, \forall u, 0 < u < p; \\ \delta_u = \text{niv}_{\beta_u}, \forall u, 0 < u \leq p; \end{array} \right.$$

où $l = \text{niv}_{b'}$ et t_l est issu de la définition de la suite $(b_{d''})_{l \leq d'' \leq d'}$ définie dans la proposition 28.

Afin de montrer que $b \in OG_{(K, a, d)}(br)$, nous allons montrer par récurrence décroissante sur u , $0 \leq u \leq p$, que $(\mathcal{H}_u) : \beta_u \in OG_{(K, a, d)}(br)$

- pour $u = p$,
 $\beta_p = b' \in OG_{(K, a, d)}(br)$ par construction.
 Donc l'hypothèse de récurrence $(\mathcal{H}_p)$ est vraie.

- supposons $(\mathcal{H}_u)$, $0 < u \leq p$, vraie et montrons que $(\mathcal{H}_{u-1})$ est vraie.
 On a par définition $\beta_{u-1} = \text{dernier brin de } ChE_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u)$,
 avec $\delta_u = \text{niv}_{\beta_u}$.

On doit examiner deux cas :

1. soit $\tau_{u-1} \in K$,
2. soit $\tau_{u-1} \notin K$.

Si $\tau_{u-1} \in K$:

On a par définition $\beta_{u-1} \in EchE_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u) = Ech_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u)$ car $\delta_u = \text{niv}_{\beta_u}$.
 Puisque $\delta_u = \text{niv}_{\beta_u} < d' \leq d$ pour $0 < u \leq p$ d'après la remarque 4 on a $\delta_u + 1 \leq d' \leq d$.
 D'où suite à la définition récursive des chemins de connection on a :

$$Ech_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u) \subseteq Ech_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u+1)}(\beta_u) \subseteq Ech_{(\tau_{u-1}, a, \min\{d, \delta_u+1\})}(\beta_u)$$

Puisque $\beta_{u-1} \in Ech_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u)$ alors $\beta_{u-1} \in Ech_{(\tau_{u-1}, a, \min\{d, \delta_u+1\})}(\beta_u)$.
 Comme on suppose par hypothèse de récurrence que $\beta_u \in OG_{(K, a, d)}(br)$, alors $\beta_{u-1} \in OG_{(K, a, d)}(br)$.
 Ce qui nous permet de conclure dans le cas où $\tau_{u-1} \in K$.

Si $\tau_{u-1} \notin K$:

On a alors $\tau_{u-1} = i$, et en regardant la définition des brins $\beta_0, \dots, \beta_q$:

- τ_{u-2} et $\tau_u \in \{i-1, i+1\}$,
- si $\tau_u = i-1$ alors $\beta_u \in (C_{\tau_u+1}^{\delta_u} \cup S_{\tau_u}^{\delta_u})$, c'est à dire $\beta_u \in (C_i^{\delta_u} \cup S_{i-1}^{\delta_u})$,
- si $\tau_u = i+1$ alors $\beta_u \in (S_{\tau_u-1}^{\delta_u} \cup C_{\tau_u}^{\delta_u})$, c'est à dire $\beta_u \in (S_i^{\delta_u} \cup C_{i+1}^{\delta_u})$,

Puisque δ_u est tel que $a \leq \delta_u \leq d$, et que l'on suppose que les i -cellules de la pyramide entre les niveaux a et d ne sont ni supprimées ni contractées alors $\beta_u \notin (S_i^{\delta_u} \cup C_i^{\delta_u})$. Nous allons alors examiner les 2 cas restants :

1. $\tau_u = i-1$ et $\beta_u \in S_{i-1}^{\delta_u}$.
2. $\tau_u = i+1$ et $\beta_u \in C_{i+1}^{\delta_u}$.

1. Si $\tau_u = i-1$ et $\beta_u \in S_{i-1}^{\delta_u}$:

Nous allons montrer que β_u et β_{u-1} appartiennent à un chemin de connection issu d'un brin de $OG_{(K, a, d)}(br)$, ce qui nous permettra de conclure que β_{u-1} aussi.

Par construction on a $\beta_{u-1} = \text{dernier brin de } Ch_{(\tau_{u-1}, a, \delta_u)}(\beta_u)$.

Comme $\delta_u = \text{niv}_{\beta_u}$, en utilisant la proposition 2 page 12 on sait que $\beta_{u-1} = \beta_u \alpha_{\tau_{u-1}}^{\delta_u}$ c'est à dire $\beta_{u-1} = \beta_u \alpha_i^{\delta_u}$.

Puisque $\beta_u \in S_{i-1}^{\delta_u}$ et que par α_i on reste dans la même i -cellule, alors $\beta_{u-1} \in S_{i-1}^{\delta_u}$ aussi et $\delta_{u-1} = \delta_u$.
 Soit $C = \langle \rangle_{(K)^{\delta_u}}$, puisque l'on suppose par hypothèse de récurrence que $\beta_u \in OG_{(K,a,d)}(br)$, en utilisant la proposition 24 page 59 on sait alors que $C \subseteq OG_{(K,a,d)}(br)$.
 Soit $brin = \beta_u \alpha_{\tau_u}^{\delta_u}$ (on a alors $niv_{brin} \geq \delta_u$).
 Comme $brin \in C$, alors $brin \in OG_{(K,a,d)}(br)$.
 D'autre part, par la proposition 13 page 35, on sait que le dernier brin de $Ch_{(\tau_u,a,\delta_u)}(brin)$ est $brin \alpha_{\tau_u}^{\delta_u}$ c'est à dire β_u .
 Par définition $Ch_{(\tau_u,a,\delta_u)}(brin) = ChE_{(\tau_u,a,\delta_u)}(brin)$,
 et $ChE_{(\tau_u,a,\delta_u+1)}(brin) = (ChE_{(\tau_u,a,\delta_u)}(brin), ChE_{(\tau_{u-1},a,\delta_u)}(\beta_u), \dots)$, avec $\tau_{u-1} = \tau_u + 1$.
 D'où β_u et $\beta_{u-1} \in ChE_{(\tau_u,a,\delta_u+1)}(brin)$.
 Puisque $u > 0$, $\beta_u \in Ech_{(i,a,d')}^{\circ}(b)$, et $a \leq niv_{\beta_u} \leq d' - 1 < d$, alors $a + 1 \leq \delta_u + 1 \leq d' \leq d$. Comme d'autre part, $niv_{brin} \geq \delta_u$, on a alors $\min\{d, niv_{brin} + 1\} \geq \delta_u + 1$.
 D'où $\beta_{u-1} \in ChE_{(\tau_u,a,\min\{d,niv_{brin}+1\})}(brin)$.
 Puisque $brin \in OG_{(K,a,d)}(br)$ alors β_{u-1} aussi.
 Donc si $\tau_u = i - 1$ et $\beta_u \in S_{i-1}^{\delta_u}$, $(\mathcal{H}_{u-1})$ est vraie.

2. Si $\tau_u = i + 1$ et $\beta_u \in C_{i+1}^{\delta_u}$:
 on montre de manière similaire que $(\mathcal{H}_{u-1})$ est encore vraie.

Donc si $\tau_{u-1} \notin K$ alors $(\mathcal{H}_{u-1})$ est vraie.

Donc dans tous les cas $(\mathcal{H}_{u-1})$ est vraie.

Donc $\beta_u \in OG_{(K,a,d)}(br)$, $\forall u$, $0 \leq u \leq p$.

Par conséquent $b \in OG_{(K,a,d)}(br)$.

□

La proposition 32 montre que si au cours de la construction de la pyramide, aucune i -suppression ou i -contraction n'est intervenue alors les i -cellules généralisées sont deux à deux disjointes ou confondues.

Lorsque des i -suppressions et/ou i -contractions sont intervenues au cours de la construction de la pyramide, les i -cellules généralisées peuvent alors s'intersecter sans pour autant être confondues. Comme le montre les figures 17 et 18, on peut remarquer que deux cas d'intersection non vide sans égalité peuvent être possibles :

1. les deux cellules généralisées ont en commun des brins formant une cellule au niveau d .
 C'est à dire qu'elles ont en commun une partie $\langle \rangle_{(K)^d}(b')$ pour $b' \in OG_{(K,a,d)}(b) \cap B^d$ (cf. figure 17) ;
2. les deux cellules généralisées n'ont que des brins disparus en commun (cf. figure 18).

Afin de comprendre pourquoi en cas de i -suppression ou i -contraction deux i -cellules généralisées peuvent s'intersecter sans être confondues, nous allons prendre C une i -cellule supprimée ou contractée au niveau c de la pyramide et regarder deux choses :

1. si elle peut être découverte par une i -cellule généralisée ;
2. si c'est, le cas, si on peut également atteindre d'autres i -cellules du même niveau qu'elle.

Pour qu'une cellule généralisée découvre C il faut qu'un chemin partant d'un brin extérieur à C la traverse. C'est à dire que ce chemin doit permettre de découvrir C en partant d'une autre i -cellule du niveau c déjà découverte par la cellule généralisée. Pour passer d'une i -cellule à une autre il faut utiliser l'involution α_i . Par définition des chemins de connexion, cette involution est l'involution initiale de $ChE_{(i,a,c')}$ avec $a \leq c' \leq d$, mais est également présente dans $ChE_{(i+1,a,c')}$

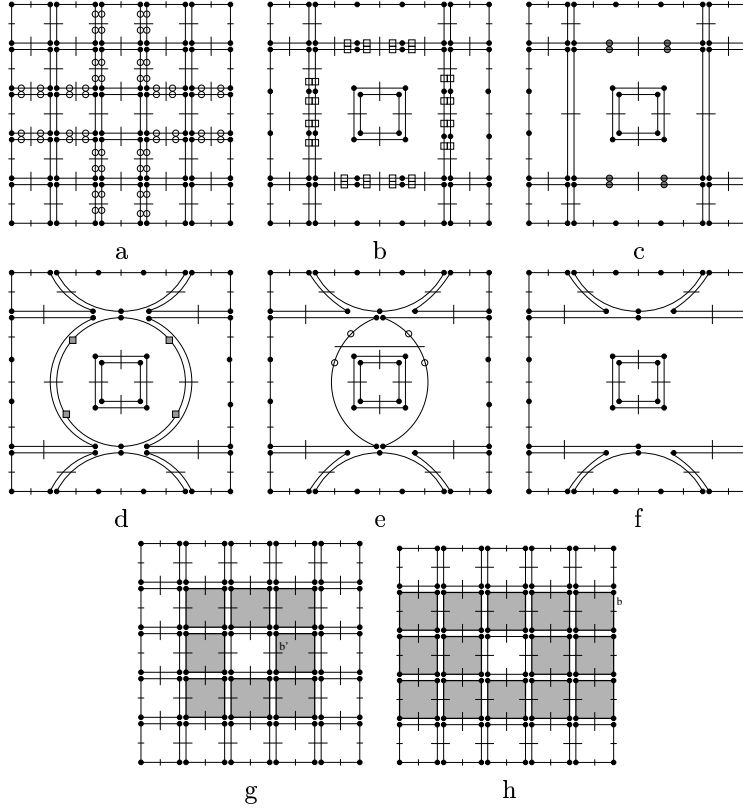


FIG. 17 – Exemple où du fait de la présence de 2-contractions, les faces généralisées s'intersectent sans pour autant être confondues. De (a) à (f) sont représentés les 6 niveaux de la pyramide (de 0 à 5). Les brins 0-supprimés, (resp. 1-supprimés, 1-contractés et 2-contractés) sont marqués par des carrés vides (resp. des cercles, des disques gris et des carrés gris). (g) (resp. (h)) face généralisée observée entre les niveaux 0 et 5 et issue du brin b (resp. b'). On note que ces deux faces généralisées s'intersectent sans être confondues et ont en commun des brins formant une face au niveau 5.

et $ChE_{(i-1,a,c')}$ calculés pour des brins respectivement $(i+1)$ -contractés et $(i-1)$ -supprimés. Puisque pour construire une i -cellule généralisée, les chemins de connections utilisés sont d'involution initiale α_j avec $j \in N - \{i\}$, on ne pourra compter sur un chemin de type $ChE_{(i,a,c')}$. D'autre part, toujours par rapport à la définition des chemins de connection, on sait que si l'on veut faire intervenir α_i^c , il faut que $c' > c$. Par conséquent pour que C soit découverte par une i -cellule généralisée il faut qu'un brin voisin de C soit $(i+1)$ -contracté ou $(i-1)$ -supprimé à un niveau $c' > c$ pour ainsi faire passer un chemin. Comme on peut le voir sur la figure 19 il faut qu'il existe $b' \in C$ et $b'' = b'\alpha_i^c$ tel que $b'' \in S_{i-1}^{c'}$ (resp. $b'' \in C_{i+1}^{c'}$) et appartient déjà à la cellule généralisée car de cette manière on aura pour $b''' = b''\alpha_{i-1}^{c'} \in (BS_{i-1}^{c'} \cup S_{i-1}^{c'})$ (resp. $b''' = b''\alpha_{i+1}^{c'} \in (BS_{i+1}^{c'} \cup C_{i+1}^{c'})$) :

$$ChE_{(i-1,a,c'+1)}(b''') = \left(ChE_{(k_1,a,c')}(b_1), ChE_{(k_2,a,c')}(b_2), \dots \right)$$

avec

- $k_1 = i-1$, $b_1 = b''' \in (BS_{i-1}^{c'} \cup S_{i-1}^{c'})$;
- $k_2 = i$, $b_2 = b'''\alpha_{i+1} = b'' \in S_{i-1}^{c'}$;
- $ChE_{(k_2,a,c')}(b_2) = \dots = ChE_{(k_2,a,c'+1)}(b_2)$ (car $b_2 = b''$ est voisin de b' il ne peut donc pas être voisin de i -suppression ou i -contraction entre les niveaux c et c' ni être lui même supprimé ou contracté) ;
- $ChE_{(i,a,c'+1)}(b'') = \left(ChE_{(i,a,c)}(b''), \dots \right)$ et d'après les propriétés des chemins, le dernier brin

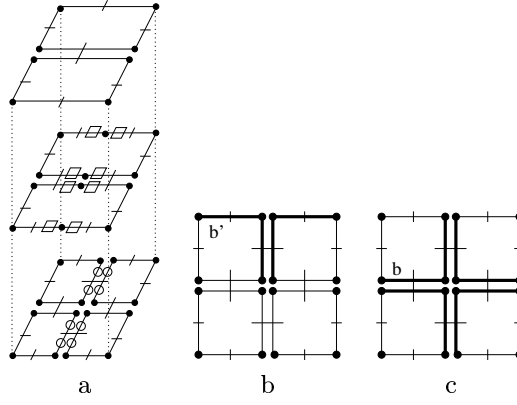


FIG. 18 – Exemple de pyramide de 2-G-cartes où deux arêtes généralisées s'intersectent mais ne sont pas confondues. (a) : la pyramide où les arêtes (resp. les sommets) supprimées sont marquées d'un cercle (resp. d'un carré). (b) et (c) : représentations respectives des arêtes généralisées $A_1 = OG_{(<0,2>,0,2)}(b')$ et $A_2 = OG_{(<0,2>,0,2)}(b)$. Celles-ci s'intersectent sans pour autant avoir de partie commune survivant au niveau 5.

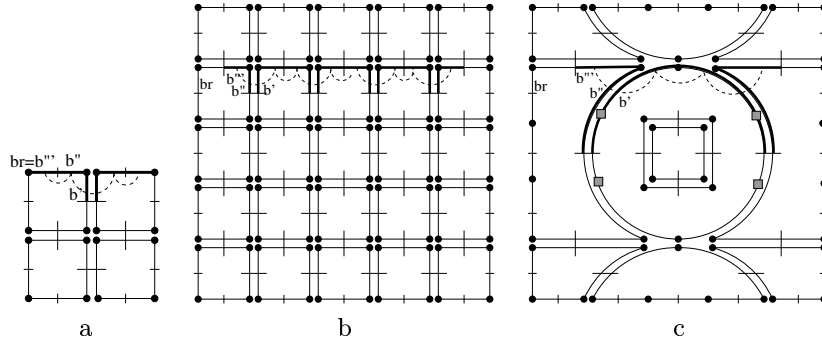


FIG. 19 – Exemple de chemin permettant de découvrir une i -cellule supprimée ou contractée par une i -cellule généralisée. (a) : Découverte d'une arête supprimée au niveau 0 (contenant le brin b') par l'arête généralisée issue du brin br dans le cadre de la pyramide de la figure 18. La découverte de cette arête se fait par $ChE_{(0,0,2)}(b''')$ qui passe par $b''' \in BS_0^1$, $b'' \in S_0^1$ et $b' \in S_1^0$. (b) et (c) : Découverte d'une face contractée au niveau 3 (contenant le brin b') par la face généralisée issue du brin br dans le cadre de la pyramide de la figure 17. La découverte de cette face se fait par $ChE_{(1,0,5)}(b''')$ qui passe par $b''' \in BS_1^4$, $b'' \in S_1^4$ et $b' \in C_2^3$. Ce chemin est illustré en (b). ((a) donne le chemin $ChE_{(1,3,5)}(b''')$).

de $ChE_{(i,a,c)}(b'')$ est $b''\alpha_i^c = b'$.

(et respectivement si on prend le cas où $b'' \in C_{i+1}^{c'}$).

Donc une i -cellule supprimée ou contractée peut être découverte par une i -cellule généralisée.

Par contre si la i -cellule C à déjà été découverte par la cellule généralisée, peut on à partir d'elle découvrir d'autres i -cellules du niveau c ? La réponse est non, car on sait par définition des chemins de connection que :

- si le brin initial br d'un chemin est un brin de B^c (supprimé ou contracté au niveau c) les brins au milieu du chemin sont des brins disparus entre les niveaux a et $c-1$. Seul le dernier brin du chemin peut appartenir à B^c (pas à B^{c+1} , car le seul chemin qui permettrait cela est $ChE_{(i,a,c+1)}(br)$, or du fait de la définition des i -cellules généralisées, ce chemin ne sera

jamais tenté). De plus par définition on a $ChE_{(j,a,c+1)}(br) = ChE_{(j,a,c)}(br)$ avec $j \in N - \{i\}$ car $br \in (S_i^c \cup C_i^c)$ et ne peut donc pas appartenir à $(BS_j^c \cup S_j^c \cup C_j^c)$. Et le dernier brin de $ChE_{(j,a,c)}(br)$ est $br.\alpha_j^c$ d'après les propriétés des chemins. Donc ce dernier brin appartient toujours à C et pas à une autre i -cellule. Par conséquent à partir de br on ne peut directement découvrir d'autres i -cellules.

- en prenant $br \in B^{niv}$ avec $a \leq niv < c$, on montre de la même manière que l'on peut remonter au mieux sur un brin de la i -cellule C mais en tout cas on ne peut pas en sortir pour atteindre une autre i -cellule.

Donc le problème de la présence de i -cellules supprimées ou contractées dans la pyramide réside dans le fait que l'on peut y "entrer" mais pas en "sortir" ce qui permet de les découvrir mais pas de découvrir d'autres i -cellules à partir d'elles.

Lorsqu'il n'y a aucune i -suppression ou i -contraction au cours de la construction de la pyramide, les i -cellules découvertes par des i -cellules généralisées le sont par des chemins que l'on peut "remonter" dans tous les cas. Donc si l'on peut ici encore découvrir des i -cellules en faisant des chemins de connection d'involution initiale α_{i+1} ou α_{i-1} , on peut également, en sortir pour découvrir d'autres i -cellules par des chemins de connection d'involution initiale α_{i+1} ou α_{i-1} .

Remarque 5 : *Il est vrai que si des i -contractions ou i -suppressions ont été effectuées lors de la construction de la pyramide, les i -cellules généralisées peuvent s'intersecter sans être confondues (cf. figures 17 et 18). Mais dans certains cas la proposition 32 est tout de même vérifiée, comme c'est le cas dans l'exemple de la figure 20 où toutes les faces généralisées sont deux à deux disjointes ou confondues malgré la présence de 2-contractions lors de la construction de la pyramide.*

Remarque 6 : *Dans le cas particulier d'une pyramide représentant différents niveaux de segmentation d'une même image, les deux phases de construction (la fusion de régions similaires selon un critère d'homogénéité et la simplification des bords des régions) sont réalisées par des suppressions de cellules de dimension comprise entre 0 et $n - 1$. Donc si l'on observe les régions (n -cellules), on peut retrouver dans tous les cas les régions généralisées correspondantes puisqu'il n'y a ni contraction, ni suppression de n -cellules.*

L'idée de la démonstration de la proposition 32 est la suivante. On prend un brin dans l'intersection non nulle de deux cellules généralisées. Puis on montre en partant de ce brin que le brin initial de chaque cellule généralisée considérée appartient à l'autre cellule généralisée. Ce qui nous permet en utilisant la proposition 30 de conclure sur le fait que les deux cellules généralisées sont alors incluses l'une dans l'autre.

Pour montrer que si un brin d'une cellule généralisée appartient à une autre cellule généralisée alors le brin initial de la première appartient à la deuxième, on construit tout d'abord une suite de brins $(b_1, \dots, b_p)$ reliant le brin en commun et le brin initial de la première cellule généralisée considérée (cf remarque 2 page 57). Chaque brin b_u est découvert par la cellule généralisée considérée au pas u de sa construction (cf. définition 11 page 55). Puis on montre que chacun de ces brins appartient à la seconde cellule généralisée en utilisant notamment la proposition 31 page 68, ou en montrant que le brin appartient à l'ensemble de connection issu d'un brin déjà dans la seconde cellule généralisée pour conclure que le brin lui même est dans la seconde cellule généralisée.

Proposition 32 : *Soit $i \in N$, $K = N - \{i\}$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et $br_1, br_2 \in B^d$. Et on considère que P est une pyramide dans laquelle aucune i -suppression ou i -contraction n'a été effectuée entre les niveaux a et d .*

On a alors $OG_{(K,a,d)}(br_1) \cap OG_{(K,a,d)}(br_2) = \emptyset$ ou $OG_{(K,a,d)}(br_1) = OG_{(K,a,d)}(br_2)$.

Preuve : Supposons $OG_{(K,a,d)}(br_1) \cap OG_{(K,a,d)}(br_2) \neq \emptyset$.
Soit $brin \in OG_{(K,a,d)}(br_1) \cap OG_{(K,a,d)}(br_2)$.

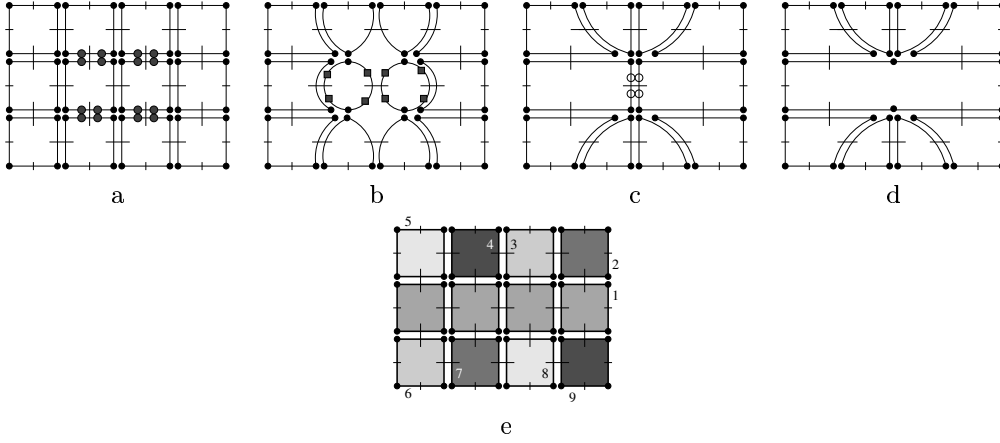


FIG. 20 – Exemple où malgré la présence de 2-contractions, les faces généralisées sont disjointes ou confondues. De (a) à (d) sont représentés les 4 niveaux de la pyramide (de 0 à 3). Les brins 0-supprimés, (resp. 1-supprimés, 1-contractés et 2-contractés) sont marqués par des carrés vides (resp. des cercles, des disques gris et des carrés gris). (e) : les différentes faces généralisées observées entre les niveaux 0 et 3. On observe que pour tout brin k , $1 \leq k \leq 9$, pour tout $b \in \langle \alpha_0^3, \alpha_1^3 \rangle(k)$ la face généralisée issue de b est confondue avec celle issue de k , et pour deux brins n'étant pas dans la même face au niveau 3, on observe que leurs faces généralisées sont disjointes.

D'après la proposition 24 (avec $\delta = a$) page 59, $OG_{(K,a,d)}(br_1)$ et $OG_{(K,a,d)}(br_2)$ sont des unions d'orbites $\langle \rangle_{(K)^a}$.

Donc $\langle \rangle_{(K)^a}(brin) \subseteq OG_{(K,a,d)}(br_1) \cap OG_{(K,a,d)}(br_2)$.

On note C cette cellule ($C = \langle \rangle_{(K)^a}(brin)$). Soit b le premier brin de C qui a été découvert par l'orbite généralisée $OG_{(K,a,d)}(br_1)$.

D'après la remarque 2 page 57, il existe alors une suite minimale de brins $\{b_1, \dots, b_p\}$ telle que

$$\begin{cases} b_1 = br_1, \\ b_p = b, \\ b_{u+1} \in EchE_{(t_u, a, d_u)}(b_u), \forall u, 1 \leq u < p, \\ t_u \in K, \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ d_u = \min\{d, niv_{b_u} + 1\}. \end{cases}$$

et on a :

$$\begin{cases} b_u \in OG_{u(K,a,d)}(br_1), \forall u, 1 \leq u \leq p, \\ b_u \notin OG_{u-1(K,a,d)}(br_1), \forall u, 1 < u \leq p, \\ b_{u+1} \neq b_u, \forall u, 1 \leq u < p. \end{cases}$$

Afin de montrer que $br_1 \in OG_{(K,a,d)}(br_2)$, nous allons montrer par récurrence (décroissante) sur u , $1 \leq u \leq p$ que $b_u \in OG_{(K,a,d)}(br_2)$.

– pour $u = p$,

par hypothèse $b_p = b \in C \subseteq OG_{(K,a,d)}(br_2)$.

Donc l'hypothèse est vraie pour $u = p$.

– supposons l'hypothèse de récurrence vraie pour u , $1 < u \leq p$ et montrons qu'elle est encore vraie au rang $u - 1$.

Par construction on sait que :

$$b_u \in EchE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_{u-1}), \forall u, 1 < u \leq p.$$

On doit alors examiner deux cas :

1. soit $b_u \in EchE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}^\circ(b_{u-1})$,

2. soit b_u = dernier brin de $ChE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_{u-1})$.

Si $b_u \in EchE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}^\circ(b_{u-1})$:

Sachant que $b_u \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$, en utilisant la proposition 31 page 68 on montre que $b_{u-1} \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$.

Si b_u = dernier brin de $ChE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_{u-1})$:

Puisque $d_{u-1} = \min\{d, niv_{b_{u-1}} + 1\}$ on a deux cas à examiner : selon si $d_{u-1} \leq niv_{b_{u-1}}$ ou si $d_{u-1} > niv_{b_{u-1}}$.

– **Si $d_{u-1} \leq niv_{b_{u-1}}$:**

Par la proposition 2 page 12 on sait que $b_u = b_{u-1}\alpha_{t_{u-1}}^{d_{u-1}}$ et que dernier brin de $ChE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_u) = b_u\alpha_{t_{u-1}}^{d_{u-1}} = b_{u-1}$.

D'où $b_{u-1} \in EchE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_u)$.

Comme $d_{u-1} = \min\{d, niv_{b_{u-1}} + 1\}$ et $d_{u-1} \leq niv_{b_{u-1}}$ alors $d_{u-1} = d$.

Puisque $b_u = b_{u-1}\alpha_{t_{u-1}}^{d_{u-1}}$, on en déduit que $d_{u-1} \leq niv_{b_u}$.

Comme $d_u = \min\{d, niv_{b_u} + 1\}$, $d_{u-1} \leq niv_{b_u}$ et $d_{u-1} = d$, alors $d_u = d = d_{u-1}$.

D'où $b_{u-1} \in EchE_{(t_{u-1}, a, d_u)}(b_u)$.

Puisque l'on suppose $b_u \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$, et que $t_{u-1} \in K$ alors $b_{u-1} \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$.

– **Si $d_{u-1} > niv_{b_{u-1}}$:** alors $d_{u-1} = niv_{b_{u-1}} + 1$

Par définition des chemins de connection (définition récursive) on a :

1. si $b_{u-1} \notin (S_{t_{u-1}}^{t_{u-1}} \cup C_{t_{u-1}}^{t_{u-1}})$ alors
 $ChE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_{u-1}) = ChE_{(t_{u-1}, a, niv_{b_{u-1}})}(b_{u-1})$
2. sinon $ChE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_{u-1}) = (ChE_{(k_1, a, niv_{b_{u-1}})}(b'_1), \dots, ChE_{(k_q, a, niv_{b_{u-1}})}(b'_q))$,
avec $k_1, \dots, k_q$ et $b'_1, \dots, b'_q$ respectant la définition 8 page 40.

Dans le premier cas on a alors b_u = dernier brin de $ChE_{(t_{u-1}, a, niv_{b_{u-1}})}(b_{u-1})$.

D'où, par la proposition 2 page 12, $b_u = b_{u-1}\alpha_{t_{u-1}}^{niv_{b_{u-1}}}$, $niv_{b_u} \geq niv_{b_{u-1}}$, d'où dernier brin de $ChE_{(t_{u-1}, a, niv_{b_{u-1}})}(b_u) = b_u\alpha_{t_{u-1}}^{niv_{b_{u-1}}} = b_{u-1}$.

D'où $b_{u-1} \in EchE_{(t_{u-1}, a, niv_{b_{u-1}})}(b_u)$.

Puisque $niv_{b_u} \geq niv_{b_{u-1}}$ et $niv_{b_{u-1}} < d$, on a $niv_{b_{u-1}} \leq d_u$ et $EchE_{(t_{u-1}, a, niv_{b_{u-1}})}(b_u) \subseteq EchE_{(t_{u-1}, a, d_u)}(b_u)$.

Donc $b_{u-1} \in EchE_{(t_{u-1}, a, d_u)}(b_u)$.

Puisque l'on suppose $b_u \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$, et que $t_{u-1} \in K$ alors $b_{u-1} \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$ dans ce premier cas.

Dans le deuxième cas : puisque b_u est le dernier brin de $EchE_{(t_{u-1}, a, niv_{b_{u-1}} + 1)}(b_{u-1})$, et que par construction de la suite $(b_u)_{1 \leq u \leq p}$, $b = u \neq b_{u-1}$ on a alors $b_u \in BS_{t_{u-1}}^{niv_{b_{u-1}}}$.

Par définition $b'_1, \dots, b'_q \in (C_{t_{u-1}}^{niv_{b_{u-1}}} \cup S_{t_{u-1}}^{niv_{b_{u-1}}})$ et $k_1, \dots, k_q \in \{t_{u-1}, t_{u-1} - 1, t_{u-1} + 1\}$. Comme la seule involution permettant de changer de t_{u-1} -cellule est $\alpha_{t_{u-1}}$ alors $k_q = t_{u-1}$.

Par définition on a également

$$ChE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_u) = (ChE_{(l_1, a, niv_{b_{u-1}})}(b''_1), \dots, ChE_{(l_r, a, niv_{b_{u-1}})}(b''_r)),$$

avec $l_1, \dots, l_r$ et $b''_1, \dots, b''_r$ respectant la définition 8 page 40.

on peut montrer par récurrence sur v , $1 \leq v \leq q$, que

– $b''_{v+1} = b'_{q+1-v}$,

– $l_v = k_{q+1-v}$,

Puisque $b_{u-1} = b'_1 = b''_{q+1}$, on a alors $b_{u-1} \in EchE_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_u)$.

Par définition $d_{u-1} = \min\{d, niv_{b_{u-1}} + 1\}$, $d_u = \min\{d, niv_{b_u} + 1\}$

et on suppose $d_{u-1} = \text{niv}_{b_{u-1}} + 1 \leq d$.

Puisque $b_u \in BS_{t_{u-1}}^{\text{niv}_{b_{u-1}}}$, on a $\text{niv}_{b_u} \geq d_{u-1}$.

D'où $d_u \geq d_{u-1}$ et $\text{Ech}E_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_u) \subseteq \text{Ech}E_{(t_{u-1}, a, d_u)}(b_u)$.

Donc $b_{u-1} \in \text{Ech}E_{(t_{u-1}, a, d_u)}(b_u)$.

Puisque l'on suppose $b_u \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$, et que $t_{u-1} \in K$ alors $b_{u-1} \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$ dans ce deuxième cas.

Donc quelque soit le cas, si $d_{u-1} > \text{niv}_{b_{u-1}}$, $b_{u-1} \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$.

Donc si b_u = dernier brin de $\text{Ch}E_{(t_{u-1}, a, d_{u-1})}(b_{u-1})$ on a $b_{u-1} \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$.

Donc $\forall u, 1 \leq u \leq p, b_u \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$.

Par conséquent $br_1 \in OG_{(K, a, d)}(br_2)$, et en utilisant la proposition 30 page 67 on obtient $OG_{(K, a, d)}(br_1) \subseteq OG_{(K, a, d)}(br_2)$.

De la même manière on prouve que $br_2 \in OG_{(K, a, d)}(br_1)$, d'où $OG_{(K, a, d)}(br_2) \subseteq OG_{(K, a, d)}(br_1)$.

Conclusion : si $OG_{(K, a, d)}(br_1) \cap OG_{(K, a, d)}(br_2) \neq \emptyset$, alors $OG_{(K, a, d)}(br_1) = OG_{(K, a, d)}(br_2)$.
ce qui montre la propriété.

□

5.3 Variante possible

Les orbites généralisées ont, comme on l'a vu dans la sous section précédente certaines propriétés. Par exemple, si aucune i -suppression ou i -contraction n'est intervenue dans la construction de la pyramide, les i -cellules sont alors deux à deux disjointes ou confondues (cf. proposition 32 page 73). Cependant, cette propriété n'est pas vraie dans le cas général (cf. figure 21). D'autre part, les orbites généralisées n'ont pas une certaine propriété de symétrie : on peut trouver des orbites contenues l'une dans l'autre sans pour autant être confondues. Par exemple dans la figure 17 page 71, la face généralisée $OG_{(<0,1>,0,5)}$ issue de b' est incluse (strictement) dans la face généralisée issue de b . Aussi dans cette partie nous proposons une variante possible concernant les orbites généralisées permettant de résoudre ces problèmes.

Pour construire cette variante nous cherchons à augmenter le nombre de brins considérés pour faire en sorte que deux orbites généralisées qui s'intersectent, deviennent par cette variante confondues. Pour expliquer l'idée de cette variante nous allons prendre comme exemple la pyramide de 2-G-cartes de la figure 21 où les deux arêtes généralisées issues des brins b' et b s'intersectent sans être confondues. Comme on peut le voir sur le schéma (figure 22) représentant la construction de ces deux arêtes généralisées, les brins $e = 12$ et $f = 13$ (resp. $2 = i$ et $3 = j$) sont découverts par le chemin de connection $\text{Ch}_{(0,0,2)}(b')$ (resp. $\text{Ch}_{(0,0,2)}(b)$) lorsque l'on se place dans A_1 (resp. A_2). Par contre une fois que $12 = e$ et $13 = f$ (resp. $i = 2$ et $j = 3$) sont découverts dans A_2 (resp. A_1), on ne peut pas, par leur biais, découvrir b' (resp. b) en "remontant le chemin". L'idée est donc de permettre cela.

Pour cela il faut permettre de faire un chemin de connection à partir d'un brin i -supprimé ou i -contracté. Pour l'instant les seuls chemins possibles sont ceux dont l'involution initiale est α_j avec $j \in \{0, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$. Nous allons donc permettre de faire les chemins de connections d'involution initiale $\alpha_i = \alpha_{j+1}$ ou α_{j-1} pour un brin initial de $S_{j+1} \cup C_{j+1}$ ou $S_{j-1} \cup C_{j-1}$. Il y a deux cas particuliers :

1. $i = 0$ et là on ne peut alors avoir que $j = 1$ et le brin considéré $\in S_{j-1}$ (car $C_0 = \emptyset$) ;
2. $i = n$ et là on ne peut alors avoir que $j = n - 1$ et le brin considéré $\in C_{j+1}$ (car $S_n = \emptyset$).

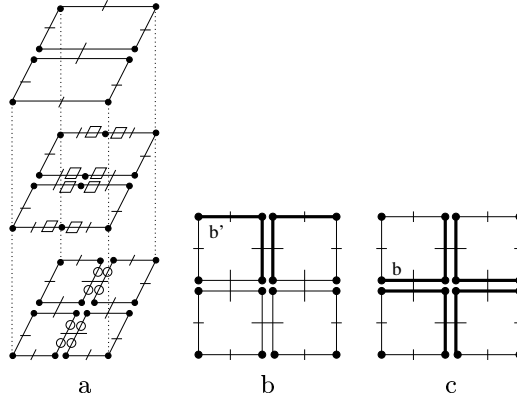


FIG. 21 – Exemple de pyramide de 2-G-cartes où deux arêtes généralisées s’intersectent mais ne sont pas confondues. (a) : la pyramide où les arêtes (resp. les sommets) supprimées sont marquées d’un cercle (resp. d’un carré). (b) et (c) : représentations respectives des arêtes généralisées $A_1 = OG_{(<0,2>,0,2)}(b')$ et $A_2 = OG_{(<0,2>,0,2)}(b)$.

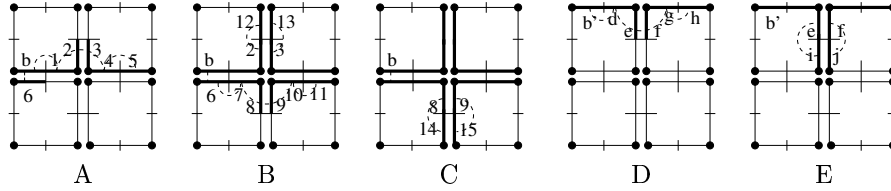


FIG. 22 – Schéma de la construction des arêtes généralisées issues des brins b et b' dans la pyramide de la figure 21. (A), (B) et (C) : les trois phases de la construction de $A_2 = OG_{(<0,2>,0,2)}(b)$. (D) et (E) : les deux phases de la construction de $A_1 = OG_{(<0,2>,0,2)}(b')$.

Pour que ces deux cas ne soient pas traités à part et puisque l’on n’a pas besoin de considérer 2 fois le fait qu’un brin soit S_i ou C_i (en faisant S_{j+1} et S_{j-1} ou C_{j+1} et C_{j-1} dans les autres cas), nous n’allons ajouter dans l’ensemble des chemins à effectuer au cours de la découverte de l’orbite, les chemins de connection d’involution initiale α_i c’est à dire α_{j-1} (resp. α_{j+1}) seulement pour un brin initial appartenant à S_{j-1} (resp. C_{j+1}). Comme on peut le voir sur la figure 23, ces premières idées permettent de faire en sorte que les arêtes généralisées observées dans la figure 21 deviennent confondues. Cependant comme on peut le voir sur la figure 24 il manque encore quelques brins à ajouter. Car en effet lorsque l’on ajoute dans une cellule généralisée les

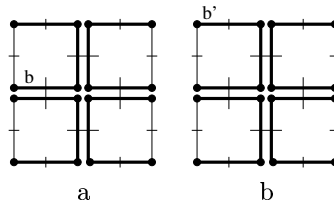


FIG. 23 – Application des premières idées concernant la variante dans le cadre de l’exemple de la figure 21. (a) : la nouvelle arête généralisée à partir de b que l’on obtiendrait en “remontant” par les brins 12 et 13. (b) : la nouvelle arête généralisée à partir de b' que l’on obtiendrait en “remontant” par les brins i et j .

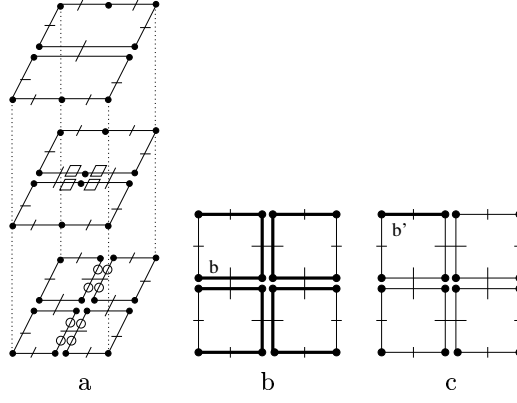


FIG. 24 – Exemple de pyramide de 2-G-cartes où sont mises en oeuvre les premières idées de la variante. (a) : la pyramide où les arêtes (resp. les sommets) supprimées sont marquées d'un cercle (resp. d'un carré). (b) et (c) : représentations respectives des arêtes généralisées issues des brins b et b' entre les niveaux 0 et 2. On remarque qu'elles s'intersectent mais ne sont pas confondues.

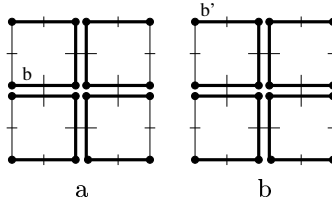


FIG. 25 – Application de toutes les idées concernant la variante dans le cadre de l'exemple de la figure 24. (a) : la nouvelle arête généralisée à partir de b obtenu en ajoutant les chemins de connection d'involution initiale α_1 pour les brins 1-supprimés et appartenant à $BS_{1,s}$. (b) : la nouvelle arête généralisée à partir de b' obtenu en ajoutant les chemins de connection d'involution initiale α_1 pour les brins 1-supprimés et appartenant à $BS_{1,s}$.

chemins de connections d'involutions initiale α_i , on peut “remonter” les chemins qui dans l'autre cellule généralisée considérée ont permis de découvrir le brin où l'on se trouve, ou découvrir de nouveaux brins.

Pour prendre en charge cela on va également ajouter les chemins issus des brins découverts en voulant “remonter”. C'est à dire que l'on va ajouter les chemins de connection d'involution initiale α_i c'est à dire α_{j-1} (resp. α_{j+1}) pour un brin initial appartenant à $BS_{j-1,s}$ (resp. $BS_{j+1,c}$) où $BS_{j-1,s}$ (resp. $BS_{j+1,c}$) désigne l'ensemble des brins voisins de brins $(j-1)$ -supprimés (resp. $(j+1)$ -contractés). La figure 25 illustre cela.

Dans le cadre de cellules généralisées on obtient alors la définition suivante :

Définition 13 (Variante des cellules généralisées $(OG'_{n(K,a,d)}(b))_{0 \leq n \leq p}$) : Soit $K = N - \{i\}$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et soit $b \in B^a$.

La suite $(OG'_{n(K,a,d)}(b))_{0 \leq n \leq p}$ est définie de la manière suivante :

- $OG'_{0(K,a,d)}(b) = \{b\}$;
- $\forall n > 0 : OG'_{n(K,a,d)}(b) = \bigcup_{i \in K} \bigcup_{b' \in OG'_{n-1(K,a,d)}(b)} (EchE_{(i,a,d)}(b') \cup A)$;

$$\text{avec } \begin{cases} d' = \min\{d, \text{niv}_{b'} + 1\}; \\ BS_{c,i+1}^{d'-1} = \{b \in BS_{i+1}^{d'-1} \text{ tel que } b\alpha_{i+1}^{d'-1} \in C_{i+1}^{d'-1}\}; \\ BS_{s,i-1}^{d'-1} = \{b \in BS_{i-1}^{d'-1} \text{ tel que } b\alpha_{i-1}^{d'-1} \in S_{i-1}^{d'-1}\}; \\ A = \text{Ech}E_{(i+1,a,d')}(b') \text{ si } b' \in BS_{c,i+1}^{d'-1}; \\ A = \text{Ech}E_{(i-1,a,d')}(b') \text{ si } b' \in BS_{s,i-1}^{d'-1}. \end{cases}$$

Si l'on veut généraliser cette définition à toute orbite, il faut apporter quelques modifications. Tout d'abord, puisque l'on se place dans le cadre d'une orbite générale, on a $K = \{i_0, \dots, i_k\} \subseteq N$ avec $0 \leq k \leq n$. Soit δ le plus grand écart entre i_l et i_{l+1} ($0 \leq l < k$). Si δ est plus grand que 1 on ne peut pas comme précédemment atteindre l'indice i en passant par l'indice $i+1$ ou $i-1$. Pour résoudre cela on va essayer de l'atteindre en considérant les indices $\{i-e, i-e+1, \dots, i-1, i+1, \dots, i+e-1, i+e\} \cap K$. Nous allons donc lors de la découverte de l'orbite généralisée, ajouter les chemins de connections d'involution initiale $\alpha_i = \alpha_{j+p}$ ou α_{j-p} avec $p \in \{1, \dots, e\}$ pour un brin initial de $S_{j+p} \cup C_{j+p} \cup BS_{j+p}$ ou $S_{j-p} \cup C_{j-p} \cup BS_{j-p}$.

Ce qui produit la définition suivante :

Définition 14 (Variante des orbites généralisées $(OG'_{n(K,a,d)}(b))_{0 \leq n \leq p}$) : Soit $K = N - \{i\}$, a et d tels que $0 \leq a \leq d \leq m$, et soit $b \in B^a$.

La suite $(OG'_{n(K,a,d)}(b))_{0 \leq n \leq p}$ est définie de la manière suivante :

- $OG'_{0(K,a,d)}(b) = \{b\}$;
- $\forall n > 0 : OG'_{n(K,a,d)}(b) = \bigcup_{i \in K} \bigcup_{b' \in OG'_{n-1(K,a,d)}(b)} \left(\text{Ech}E_{(i,a,d')}(b') \cup \bigcup_{p \in \{1, \dots, e\}} A_p \right)$;

avec $\begin{cases} d' = \min\{d, \text{niv}_{b'} + 1\}; \\ A_p = \text{Ech}E_{(i+p,a,d')}(b') \text{ si } b' \in BS_{i+p}^{d'-1} \cup C_{i+p}^{d'-1} \cup S_{i+p}^{d'-1}; \\ A_p = \text{Ech}E_{(i-p,a,d')}(b') \text{ si } b' \in BS_{i-p}^{d'-1} \cup C_{i-p}^{d'-1} \cup S_{i-p}^{d'-1}. \end{cases}$

Bien que cette variante permette de généralisée la propriété indiquant que deux cellules généralisées sont soit disjointes soit confondues, elle n'est pas entièrement satisfaisante. Tout d'abord plaçons nous dans le cadre d'une application en image, prenons trois pixels alignés, un blanc, un bleu, et un rouge, dont le bleu a disparu après deux 1-contractions (effectuées entre les niveaux 0 et 1) et une 2-contraction (effectuée entre les niveaux 1 et 2). $OG_{(\{0,1\},0,2)}(b)$ avec b un brin de la région bleue du niveau 2, sera alors composée des trois pixels blanc, bleu et rouge du niveau 0. Or il semble illogique de dire que ce sont les informations de ces trois pixels qui permettent par exemple de retrouver la couleur de l'une des deux régions du niveau 2.

Deuxièmement, si dans le cas des cellules généralisées on n'ajoutait pas tant de brins que cela, dans le cadre d'orbites en général "on se retrouve à ajouter un peu tout et n'importe quoi".

C'est pourquoi, suite à cela, même si l'on ne peut généraliser la proposition 32 dans le cadre de pyramides quelconques, il semble que la définition initiale des orbites généralisées soient la plus simple et pour l'instant la plus appropriée. Il est toujours possible d'avoir besoin d'une variante de celle-ci pour une application donnée, cependant elle dépendra de l'application.

6 Conclusion

Nous avons défini dans ce rapport la notion d'orbite généralisée dans le cadre de pyramides de n -G-cartes. Cette notion étend celle de champs récepteur, définie pour les pyramides de graphes et les pyramides de cartes combinatoires, et établit une correspondance entre une région à un niveau donné et l'ensemble des régions correspondantes à un niveau inférieur de la pyramide. La notion

d'orbite généralisée est définie pour les pyramides de n -G-cartes, ces dernières pouvant être utilisées afin de représenter des pyramides d'images de dimension n . De plus, cette notion est définie pour toute cellule de dimension quelconque, et entre deux niveaux quelconques. La définition de cette notion est basée sur la notion de chemin de connection (ou plus particulièrement des chemins de connection étendus) qui est une généralisation de la notion de connecting walk, initialement définie par Brun et Kropatsch.

Quelques propriétés des chemins de connections ainsi que des orbites généralisées ont été établies, notamment celle indiquant que les i -cellules généralisées sont deux à deux disjointes ou confondues dans le cadre de pyramides construites sans i -contraction ni i -suppression. Une variante concernant les orbites généralisées a également été évoquée.

Nous sommes en train de concevoir des opérations manipulant les pyramides de n -G-cartes. Plus précisément, nous voulons pouvoir modifier un niveau d'une pyramide, et calculer automatiquement les modifications des niveaux supérieurs et inférieurs. Une perspective de notre travail est la suivante. Étant donnée une orbite généralisée et une opération modifiant la pyramide, nous voulons optimiser le calcul de l'orbite généralisée modifiée, i.e. la déduire directement sans la recalculer entièrement.

Références

- [1] Burt, P., Hong, T., Rosenfeld, A. : Segmentation and estimation of image region properties through cooperative hierarchical computation. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **11** (1981) 802–809.
- [2] Meer, P. : Stochastic image pyramids. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* **45** (1989) 269–294.
- [3] Montanvert, A., Meer, P., Rosenfeld, A. : Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **13** (1991) 307–316.
- [4] Jolion, J., Montanvert, A. : The adaptive pyramid : A framework for 2d image analysis. *Computer Vision, Graphics and Image Processing* **55** (1992) 339–348.
- [5] Kropatsch, W. : Building irregular pyramids by dual-graph contraction. *Vision, Image and Signal Processing* **142** (1995) 366–374.
- [6] Brun, L., Kropatsch, W. : Irregular pyramids with combinatorial maps. In Amin, A., Ferri, F.J., Pudil, P., I nesta, F.J., eds. : *Advances in Pattern Recognition, Joint IAPR International Workshops SSPR'2000 and SPR'2000*. Volume 1451 of *Lecture Notes in Computer Science*, Alicante, Spain, Springer, Berlin Heidelberg, New York (2000) 256–265.
- [7] Brun, L., Kropatsch, W. : Introduction to combinatorial pyramids. In G. Bertrand, A. Imiya, R.K., ed. : *Digital and Image Geometry*. Volume 2243 of *LNCS*. Springer Verlag (2001) 108–127.
- [8] Brun, L., Kropatsch, W. : Combinatorial pyramids. In Suvisoft, ed. : *IEEE International conference on Image Processing (ICIP)*. Volume II., Barcelona (2003) 33–37.
- [9] Brun, L., Kropatsch, W. : Contraction kernels and combinatorial maps. *Pattern Recognition Letters* **24** (2003) 1051–1057.
- [10] Lienhardt, P. : N-dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds. In : *International Journal of Computational Geometry and Applications*. (1994) 275–324.
- [11] Brun, L., Kropatsch, W. : Receptive fields within the combinatorial pyramid framework. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Number 2301 in *LNCS*, Bordeaux, France (2002) 92–101.
- [12] Damiand, G., Lienhardt, P. : Removal and contraction for n-dimensional generalized maps. In : *Discrete Geometry for Computer Imagery*. Number 2886 in *Lecture Notes in Computer Science*, Naples, Italy (2003) 408–419.

- [13] Lienhardt, P. : Subdivisions of n -dimensional spaces and n -dimensional generalized maps. In : Proceedings of the fifth annual Symposium on Computational Geometry, Saarbruchen, West Germany (1989) 228–236.
- [14] Lienhardt, P. : Subdivisions of surfaces and generalized maps. In : Proceedings of Eurographics, Hamburg, West Germany (1989) 439–452.