

THÈSE

pour l'obtention du Grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006)

École Doctorale : **Sciences Pour l'Ingénieur et Aéronautique**
Secteur de Recherche : **Traitement du Signal et des Images**

Présentée par :
Patrice DENIS

Quaternions et Algèbres Géométriques, de nouveaux outils pour les images numériques couleur

Directeurs de Thèse :
Christine FERNANDEZ-MALOIGNE
Philippe CARRÉ

Soutenue le 13 décembre 2007 devant la Commission d'Examen composée de :

J.M. Chassery, Directeur de Recherche CNRS, INP Grenoble, GIPSA-LAB, UMR 5216 Rapporteur
P. Lambert, Professeur, Université de Savoie, LISTIC, EA 3703 Rapporteur
J. Angulo, Chercheur Associé, Ecole des Mines de Paris, Centre de Morphologie Mathématique Examineur
M. Berthier, Professeur, Université de La Rochelle, MIA, EA 3165 Examineur
P. Carré, Maître de Conférences, Université de Poitiers, XLIM-SIC, UMR 6172 Co-directeur de Thèse
C. Fernandez-Maloigne, Professeur, Université de Poitiers, XLIM-SIC, UMR 6172 Directeur de Thèse

Laboratoire XLIM, Département SIC : Signal Image Communications, UMR CNRS 6172

Quaternions et Algèbres Géométriques, de nouveaux outils pour les images numériques couleur

Résumé Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le contexte du traitement et de l'analyse des images couleur. Les premiers travaux pour traiter ces images consistaient à appliquer des traitements déjà existant en niveaux de gris marginalement sur les trois composantes constituant la couleur et le plus généralement dans l'espace RVB . Ces traitements ont été peu à peu améliorés notamment par l'utilisation d'espaces couleur d'avantage liés à la perception humaine mais aussi par des approches vectorielles. Dans ce travail de thèse nous nous plaçons dans la continuité de ces travaux et nous proposons une modélisation mathématique de la dimension vectorielle dans le but de manipuler les couleurs de manière globale. Trois formalismes sont présentés pour représenter la couleur : les complexes, les quaternions et les algèbres géométriques. Dans ce cadre, il est proposé de définir de nouveaux outils d'analyse couleur avec notamment une caractérisation numérique fréquentielle de chacun de ces modèles. Une étude approfondie de leurs utilisations permet de faire ressortir leurs propriétés ainsi que leurs principaux avantages et inconvénients à savoir : impossibilité des complexes à représenter les vecteurs couleurs qui par nature s'expriment en trois dimensions minimum contrairement aux quaternions et aux algèbres géométriques ; distinction entre objets manipulés (vecteurs couleur) et opérations effectuées sur ces objets (projections, rotations, ...) pour les algèbres géométriques contrairement aux quaternions ... Enfin nous avons montré que la transformée de Fourier quaternionique analyse la couleur avec une direction indiquée par un vecteur couleur, tandis que la transformée de Fourier définie au moyen de l'algèbre \mathcal{G}_3 , plus générique, répartit l'information couleur sur des composantes fréquentielles indépendantes. L'utilisation de modèles algébriques pour représenter l'information couleur permet la définition et le développement d'un filtre spatial de détection de contours tenant compte de la dispersion dans l'espace couleur.

Quaternions and Geometric Algebras, new tools for digital colour images

Abstract The main subject of this PhD thesis is colour image processing. The first methods dealing with these images consisted in applying existing greyscale processing algorithms on each of the three colour components. Colour processing has improved using perceptual colour spaces but also by considering colours as vectors. In this work, we follow the idea of colour modelization and we propose to encode their vectorial information into mathematical models in order to manipulate them globally and geometrically. Three formalisms are presented to cope with colour : complex numbers, quaternions and geometric algebras (also called Clifford algebras). New colour tools are proposed to analyse the digital spectrum embedded in each of these formalisms and the definition of Fourier transforms. We give the main advantages and drawbacks of each model, namely : impossibility for the complex numbers to represent whole colour vectors that needs at least three components to be described properly ; distinction between objects and operations on objects (projections, rotations, ...) with geometric algebras whereas it is not possible with quaternions. We then showed that the quaternionic Fourier transform analyse colours with a direction whereas the Clifford \mathcal{G}_3 Fourier transform has not got any direction to analyse the colour so it treats every colour channel independently. Eventually one of the main applications is the definition of a spatial colour edge detector filter using these formalisms.

Discipline : traitement du signal et des images.

Mots clés : Analyse d'images, espace numérique couleur, quaternions, algèbres géométriques, transformations de Fourier, filtrage spatial et fréquentiel.

Patrice Denis - Laboratoire Signal Image Communication
Bât. SP2MI - Téléport 2, Bd Marie et Pierre Curie - BP 30179 - 86962 Futuroscope Cedex

REMERCIEMENTS

J'aimerais remercier un certain nombre de personnes qui m'ont accompagné au cours de ces trois dernières années et sans lesquelles je n'aurais pas pu achever ses travaux de thèse.

Tout d'abord, je tiens à remercier tout particulièrement Philippe CARRÉ ainsi que Christine FERNANDEZ-MALOIGNE pour avoir accepté d'encadrer mes travaux de recherche. Philippe m'a de nombreuses fois éclairé lors de nos discussions scientifiques grâce notamment à son recul sur les approches fréquentielles. Christine, avec sa maîtrise du domaine de la couleur, bien que n'ayant suivi mes travaux que de plus loin, était disponible à chaque sollicitation et m'a également beaucoup apporté. Enfin tous les deux m'ont accueilli chaleureusement et m'ont fait bénéficier de leurs qualités humaines.

Je tiens à également remercier Pascal LIENHARD pour son accueil au sein du laboratoire SIC dans lequel mes travaux ont été effectués.

Ensuite, ma reconnaissance va à l'ensemble des membres de mon jury de thèse. Tout d'abord Patrick LAMBERT et Jean-Marc CHASSERY : merci beaucoup à eux d'avoir accepté la tâche de rapporteur, ainsi que pour toutes leurs remarques qui m'ont permis d'améliorer la rédaction de ce mémoire. Je tiens aussi à exprimer une sincère gratitude envers mes deux autres examinateurs, Michel BERTHIER et Jesus ANGULO qui m'ont également fourni de nombreuses observations détaillées et critiques constructives là encore vraiment bienvenues pour finaliser ce mémoire.

Maintenant, je profite aussi de cette page de remerciements pour faire « coucou » aux personnes qui ont partagé mon quotidien pendant ces trois ans.

D'abord merci aux super secrétaires : les deux Françaises (je mets un s même s'il faut pas), Sylvie, Jacqueline et Nicole. Avec ces personnes, j'ai toujours pris plaisir à discuter et surtout à bien rigoler, coucou aussi à Philippe et Nora.

Ensuite je remercie tous mes collègues et/ou amis (doctorants, docteurs ou même aucun des deux d'ailleurs) au labo : François, Samuel, Pascal, Fred, Benjamin, Fred, Loé, Hung, Sylvain, Antoine, Hondjack, les Oliviers (encore un s là ou il en faut pas !), Windu, Patience, Philou, Chimène, Sybille, Karim, Sadouanouan, Wassim, Ahmed, Kamel, Idir, Dung, Hieu, Luc, Jeff, Martin, Seb, Peff, Mathieu (MAC Team), Stéphane, Bruno, Guillaume, Yannick et toutes les autres personnes du SIC et du LISI que je n'oublie pas. Heureusement qu'ils étaient là pour faire du quotidien des jours très agréables.

Je remercie aussi tous les copains du « petit foot entre amis » et du « Championnat inter-labos » avec qui j'ai réussi à me faire violence en faisant du « sport » dans le rôle du gardien de but (si, si, un gardien se dépense !).

J'en profite aussi pour dire coucou aux amis parce que c'est marrant de les voir dans le manuscrit de thèse : Pollux, Tetelle, Sylvain, Djay, Leïla, Stéphanouille, Damino, Katya et Christian.

Pour terminer, je remercie évidemment toute ma famille, mes parents pour leur soutien ainsi que les tâches ingrates telles que la relecture pour l'orthographe par exemple. Enfin je remercie Laëtitia, ma Chacha mougnonne, pour l'anglais, pour m'avoir supporté pendant tout ce temps mais surtout le support qu'elle m'a fourni dans les moments plus difficiles.

SOMMAIRE

1	Introduction	1
2	Modélisation des couleurs par les nombres complexes	5
2.1	Les Complexes	5
2.1.1	Plan complexe	5
2.2	Transformées de Fourier pour les signaux bi-dimensionnels	6
2.2.1	Transformée de Fourier 2D discrète	7
2.2.2	Bases de l'interprétation des transformées de Fourier à deux dimensions	8
2.3	Espaces Couleur	13
2.3.1	Les espaces de primaires	14
2.3.2	Les espaces dédiés à la télévision	16
2.3.3	Les espaces perceptuels	18
2.3.4	Les espaces perceptuellement uniformes	19
2.3.5	Les espaces couleur indépendants	20
2.3.6	Étude numérique de l'espace YUV	21
2.4	Analyse spatio-chromatique d'images couleur	23
2.4.1	La transformation de Fourier spatio-chromatique	24
2.4.2	Le module du spectre fréquentiel UV sur des images couleur	34
2.5	Filtrage fréquentiel UV	34
2.6	Conclusion	35
3	Modélisation des couleurs par les quaternions	37
3.1	Définition des quaternions et propriétés	37
3.1.1	Historique	37
3.1.2	Définition	37
3.1.3	Notations	38
3.1.4	Vocabulaire	38
3.1.5	Représentation cartésienne	38
3.1.6	Représentation vectorielle	38
3.1.7	Produit quaternionique	38
3.1.8	Représentation exponentielle	39
3.1.9	Représentation polaire	39
3.1.10	Représentation de Cayley-Dickson	40
3.1.11	Représentation symplectique	40
3.1.12	Transformations géométriques	41
3.1.13	Représentation parallèle/perpendiculaire	41
3.2	Approche spatiale quaternionique pour les images couleur	41
3.2.1	Quaternions et images couleur	41

3.2.2	Séparation partie simplexe et partie perplexe	42
3.2.3	Transformations couleur	42
3.2.4	Détection de contours	43
3.3	Transformées de Fourier quaternioniques	51
3.3.1	TFQ utilisant j et k dans les exponentielles	51
3.3.2	TFQ utilisant i et j dans les exponentielles	52
3.3.3	TFQ directionelle à droite	53
3.3.4	TFQ directionelle à gauche	53
3.3.5	TFQ directionelle à deux côtés	53
3.3.6	Inversibilité	53
3.4	Approche fréquentielle quaternionique pour les images en niveaux de gris	53
3.4.1	Transformée de Fourier quaternionique pour les images en niveaux de gris	54
3.4.2	Symétries	54
3.4.3	Notion d'amplitude et de phase instantanées	56
3.5	Approche fréquentielle quaternionique pour les images couleur	58
3.5.1	Définition numérique de l'espace de Fourier quaternionique	58
3.5.2	Interprétation du spectre quaternionique	61
3.5.3	Applications	72
3.6	Conclusion	74
4	Modélisation des couleurs par les algèbres géométriques	77
4.1	Algèbres Géométriques	77
4.1.1	Définition	77
4.1.2	Vocabulaire	78
4.1.3	Les produits	79
4.1.4	Propriété du produit géométrique	81
4.1.5	Notions Complémentaires	81
4.1.6	Transformations géométriques	84
4.1.7	Notation exponentielle et rotation	85
4.1.8	Comparaison de deux 1-vecteurs par le produit géométrique	86
4.1.9	Quaterniones et algèbres géométriques	87
4.2	Approche fréquentielle par algèbres géométriques pour les images en niveaux de gris	88
4.3	Approche fréquentielle par algèbres géométriques pour les images couleur	89
4.3.1	\mathcal{G}_2 et Images Couleur	89
4.3.2	\mathcal{G}_3 et images couleur	94
4.4	Approche spatiale par algèbres géométriques pour les images couleur	98
4.4.1	Exprimer les couleurs <i>RVB</i> dans un espace Teinte Saturation Intensité	98
4.4.2	Transformations géométriques couleur	102
4.5	Filtrage spatial par algèbre de Clifford	107
4.5.1	Approche détection de Sangwine	107
4.5.2	Approche par gradient de saturation	108
4.5.3	Approche par gradient de saturation et produit géométrique	109
4.6	Conclusion	112
5	Conclusion	117
A	Algèbre géométrique \mathcal{G}_2	121
A.1	Simplification par transformées de Fourier Rapides	121
A.2	Conditions d'initialisation du spectre	122
A.3	Interprétation de l'influence d'un Dirac dans le spectre	122
A.3.1	Initialisation sur la composante scalaire	123
A.3.2	Initialisation sur la composante bivectorielle	123

A.3.3	Initialisation sur une composante vectorielle	123
B	Algèbre Géométrique \mathcal{G}_3	125
B.1	Simplification par transformées de Fourier rapides	125
B.2	Calcul numérique de la transformée de Fourier	126
B.3	Calcul numérique de la transformée de Fourier inverse	126
B.4	Conditions d'initialisation du spectre	127
B.5	Interprétation de l'influence d'un Dirac dans le spectre	129
B.5.1	Initialisation sur une composante vectorielle	129
B.5.2	Initialisation sur une composante bi-vectorielle	130
C	Transformée en ondelette quaternionique	131
C.1	Introduction	131
C.2	Quaternion	132
C.2.1	Définition	132
C.2.2	Frequency analysis : the Quaternionic Fourier Transform.	133
C.3	Colour quaternion spectrum properties	134
C.3.1	Spectrum analysis	134
C.3.2	Graphical Illustration	135
C.4	Quaternionic Filters Bank	137
C.4.1	Filtering operation : convolution product	139
C.4.2	Definition of the downsampling	140
C.4.3	Definition of the upsampling	141
C.4.4	Quaternionic Filter banks with perfect reconstruction	141
C.4.5	An example : the Quaternionic Shannon filter bank	142
C.4.6	Experimentation	144
C.5	Conclusion	144
D	Spatial and spectral Quaternionic approaches for Colour Images	147
D.1	Quaternions	148
D.1.1	Concept	148
D.1.2	\mathbb{R}^3 Transformations with Quaternions	149
D.2	Discrete Quaternion Fourier Transform	150
D.2.1	Définition	150
D.2.2	Colour quaternion spectrum properties	150
D.2.3	Digital study of the colour spectrum	151
D.2.4	Quaternionic Graphical Spectrum Illustration	151
D.3	Quaternionic filtering	152
D.3.1	Spatial filtering	152
D.3.2	Frequency filtering	158
D.4	Conclusion	160
D.5	Appendix	162
D.5.1	Digital study of the colour spectrum	162
D.5.2	Quaternionic Graphical Spectrum Illustration	163
	Bibliographie	169

NOTATIONS

Domaine de définitions

\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{H}	ensemble des quaternions
\mathbb{P}	ensemble des quaternions purs
\mathbb{S}	ensemble des quaternions unitaires
E	espace vectoriel E
\mathcal{G}_n	algèbre géométrique de dimension 2^n construite à partir d'un espace vectoriel de dimension n

Transformées de Fourier

TF ou FT	Transformée de Fourier (ou Fourier Transform en anglais)
TFD ou DFT	Transformée de Fourier Discrète
TFDI ou IDFT	Transformée de Fourier Discrète Inverse
TFQ ou QFT	Transformée de Fourier Quaternionique
TFQD ou DQFT	Transformée de Fourier Quaternionique Discrète
TFC ou CFT	Transformée de Fourier Cliffordienne
TFCD ou DCFT	Transformée de Fourier Cliffordienne Discrète
TFR ou FFT	Transformée de Fourier Rapide

Signaux

$f(\cdot)$	fonction continue
$F(\cdot)$	TF de la fonction f
$f[\cdot]$	fonction discrète
$F[\cdot]$	TFD de la fonction f
t, x, y	variables continues temporelles ou spatiales
ω, u, v	variables continues fréquentielles
m, n	variables discrètes temporelles ou spatiales
o, p	variables discrètes fréquentielles

Quaternions

$q = a + ib + jc + kd$	quaternion quelconque
q_r	partie réelle d'un quaternion q
q_i	première partie imaginaire d'un quaternion q
q_j	seconde partie imaginaire d'un quaternion q
q_k	dernière partie imaginaire d'un quaternion q

Algèbres géométriques

A ou $\mathbf{A} \in \mathcal{G}_n$	A ou \mathbf{A} sont des multivecteurs quelconques de \mathcal{G}_n
a ou $\mathbf{a} \in \mathcal{G}_n$	a ou \mathbf{a} sont des 1-vecteurs de \mathcal{G}_n
$\mathbf{f} \in \mathcal{G}_n$	fonction 1-vectorielle de \mathcal{G}_n
M_i	partie vectorielle d'un multivecteur M de \mathcal{G}_n avec $i \in 1 \dots n$
M_{ij}	partie bivectorielle d'un multivecteur M de \mathcal{G}_n avec $i \in 1 \dots n, j \in 1 \dots n$ et $i \neq j$

INTRODUCTION

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été financés par la Région Poitou-Charentes et réalisés au sein du laboratoire Signal Image et Communications de l'Université de Poitiers sous la direction de Christine Fernandez-Maloigne, Professeur et de Philippe Carré, Maître de Conférences.

Dans ce travail nous nous intéresserons spécifiquement aux images numériques couleur et étudierons l'opportunité donnée par certains formalismes mathématiques pour encoder l'information couleur. Précisément, nous étudions des objets définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f : (m, n) &\mapsto (f_r, f_g, f_b) \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Historiquement les travaux portant sur les transformations numériques des images couleur ont d'abord consisté à appliquer des traitements marginaux sur chacun des trois canaux composant la couleur. Ces traitements n'utilisent cependant pas la couleur comme une information globale mais bien comme la juxtaposition des trois composantes indépendantes. La conséquence de ce type de traitement marginal est que la plupart des résultats fournis par ces traitements entraînent l'apparition de fausses couleurs. En effet, rien n'indique que le traitement individuel de chaque composante d'un vecteur couleur entraîne un vecteur couleur proche de celui d'origine. En représentation Rouge, Vert, Bleu (RVB^1) notamment, chaque canal apporte sa contribution colorée et est ajouté aux autres en respectant le principe de la synthèse additive des couleurs. Des phénomènes isolés sur une composante particulière peuvent donc se trouver réhaussés perceptuellement du fait de leur addition avec les autres composantes couleur. Si ce phénomène existe aussi sur des images en niveaux de gris, sa perception est minimisée par rapport aux images couleur où il s'accumule avec chacun des canaux couleur. La couleur d'un pixel obtenue par un tel traitement marginal peut donc être représentée par un vecteur couleur perceptuellement très éloigné de la couleur du vecteur couleur d'origine entraînant une image visuellement altérée.

Plus tard est apparue la possibilité de considérer l'information couleur comme une information vectorielle. Dans ce cas, la couleur est vue comme un vecteur de \mathbb{R}^3 décrivant une coordonnée au sein d'un espace couleur. Différents espaces ont alors été proposés afin de représenter la couleur de manière plus ou moins proche de ce que la vision humaine pouvait percevoir des couleurs. Des traitements d'images ont ainsi vu le jour utilisant des conversions entre ces différents espaces couleur et la représentation classique jusqu'alors utilisée à savoir le RVB qui correspond à l'information directement exploitable par les périphériques informatiques classiques comme les écrans par exemple. La manipulation des vecteurs d'un espace en trois dimensions présente cependant des difficultés. Par exemple, il est difficile d'ordonner des vecteurs entre eux bien que des tentatives de définitions de relations d'ordre plus ou moins cohérentes

¹en anglais le RGB pour red, green, blue.

sur le plan perceptuel aient été proposées. Ensuite, il convient de définir la façon d'effectuer un traitement vectoriel appliqué à des vecteurs couleur à trois dimensions. La difficulté consiste alors à redéfinir pour la couleur les opérations classiques de traitement des images en niveaux de gris, par exemple le produit de convolution, la dérivabilité (et donc le gradient couleur) ou encore plus généralement toutes les approches permettant l'analyse d'une image. Notons de plus l'absence d'une analyse fréquentielle spécifique à l'utilisation de la couleur.

Dans ce contexte nous proposons d'étudier l'opportunité de coder l'information couleur des images en utilisant des représentations algébriques. Ces représentations utilisent l'information d'un vecteur couleur comme un nombre de l'algèbre utilisée. Ceci permet alors de manipuler les couleurs en utilisant les opérations fournies par l'algèbre. Les vecteurs couleur sont considérés et manipulés avec des opérations courantes de type sommes et/ou de produits définis, de façon unique pour l'algèbre. Ceci permet, en outre, d'alléger considérablement l'écriture d'opérations s'écrivant souvent de manière plus complexe en utilisant la géométrie vectorielle. Cette notion de simplification par l'algèbre est déjà utilisée en traitement du signal car on utilise les nombres complexes, qui sont des éléments d'une algèbre, pour représenter de manière différente une information. Précisément, la transformée de Fourier, qui nécessite l'utilisation des nombres complexes, permet de passer d'une vision spatiale pour une image par exemple à son équivalent en terme de fréquence. L'idée fondatrice de ces travaux est d'introduire une caractérisation fréquentielle adaptée à la spécificité de la dimension couleur des images. Nous nous intéresserons donc à l'opportunité d'utiliser les nombres complexes dans ce but. Une étude sera, pour cela, effectuée sur la transformée de Fourier complexe utilisée par McCabe afin de décrire les informations spectrales associées à la partie chromatique des couleurs. Nous montrerons alors que seule, cette chromaticité ne suffit pas à caractériser pleinement les couleurs. Ainsi nous nous intéresserons, tout comme Sangwine avant nous, à l'utilisation du formalisme des quaternions associé aux images couleur. Ces nombres hypercomplexes, car ils sont une généralisation des nombres complexes, peuvent contenir l'information couleur complète. Les vecteurs couleur sont donc représentés par des quaternions purs (dont la partie réelle est nulle) et sont manipulés au moyen d'opérations algébriques simples. Les quaternions ainsi que leur généralisation, les algèbres géométriques, seront donc utilisés dans une démarche de caractérisation fréquentielle des images couleur numériques. Nous ne nous arrêterons cependant pas au domaine des fréquences mais montrerons de plus, que ces formalismes permettent aussi de manipuler les couleurs spatialement. Nous proposerons ainsi des gradients couleur définis dans le domaine spatial avec des opérations géométriques sur les vecteurs couleur.

Ce mémoire est ainsi divisé en trois principaux chapitres qui analysent l'utilisation pouvant être faite de trois représentations algébriques différentes pour effectuer des traitements d'images couleur.

Tout d'abord, dans le chapitre 2, nous étudierons l'opportunité d'utiliser les nombres complexes afin d'effectuer des traitements d'images. Après avoir donné un bref rappel des propriétés générales concernant les nombres complexes, nous redonnerons la définition de la transformée de Fourier pour les signaux bidimensionnels mais surtout les bases de l'analyse de ces signaux pouvant être déduite de cette transformation.

La deuxième partie de ce chapitre posera la question de l'utilisation des nombres complexes pour effectuer des traitements d'images couleur. Pour cela, nous introduirons différents espaces numériques couleur afin d'en identifier un susceptible de convenir à la manipulation des couleurs par les nombres complexes. L'un des points centraux de nos travaux est la définition d'une approche fréquentielle spécifiquement dédiée à la couleur considérée dans sa globalité. C'est dans cet esprit que dans la dernière partie du chapitre 2 nous étudierons les propriétés de variations numériques des couleurs pouvant être obtenues en utilisant les composantes U et V de l'espace YUV . Ces composantes associées à des initialisations rudimentaires dans le domaine fréquentiel permettent de faire apparaître des « chemins couleur » élémentaires définis initialement par McCabe dans le domaine spatial obtenu après une transformation de Fourier « chromatique » inverse.

A partir des limites de cette approche, nous proposerons dans le chapitre 3 d'utiliser les quaternions pour encoder la totalité de l'information couleur des images que les nombres complexes ne peuvent pas contenir entièrement. On donnera tout d'abord les définitions et propriétés relatives aux quaternions

ainsi que différentes manières de les représenter. Ensuite, nous étudierons comment des opérations géométriques, définies grâce à ce formalisme dans les espaces couleur, peuvent être utilisées pour effectuer des traitements élémentaires spatiaux sur les images couleur. Nous définirons alors, à partir des travaux de Sangwine, un nouveau détecteur de contours utilisant les opérations géométriques disponibles avec les quaternions. Après avoir illustré les propriétés des quaternions dans la manipulation spatiale des images couleur numériques, nous décrirons comment ils ont été utilisés dans la littérature pour l'étude fréquentielle des images en niveaux de gris au travers des travaux de Sommer et al. ainsi que des images couleur avec les travaux de Sangwine et al.. Nous apporterons finalement notre propre interprétation de l'information fréquentielle obtenue par la transformée de Fourier quaternionique appliquée aux images couleur. Cette interprétation est basée sur l'étude numérique des interactions entre le domaine spatial et le domaine fréquentiel quaternionique. Nous constaterons qu'il existe notamment des propriétés de symétrie à la fois sur le spectre et sur son signal d'origine dues à l'utilisation de cette transformée particulière. De plus nous verrons que la transformée de Fourier quaternionique est directionnelle et que l'analyse du spectre obtenu par celle-ci dépend de cette direction.

Le dernier chapitre, qui peut être considéré comme une généralisation du chapitre 3, montrera l'apport dans le traitement des images numériques couleur de l'encodage au moyen des algèbres géométriques des pixels. Ces algèbres géométriques, aussi appelées algèbres de Clifford, seront d'abord étudiées de manière générale, comme cela est fait pour les nombres complexes ainsi que les quaternions, de manière à se familiariser avec le vocabulaire et les concepts utilisés avec ce formalisme. Nous étudierons alors comment elles ont été utilisées pour analyser les images en niveaux de gris. La suite consistera à décrire l'opportunité d'utiliser l'algèbre \mathcal{G}_2 pour encoder les images couleur à travers une étude fréquentielle utilisant ce formalisme. Nous verrons qu'il est plus pertinent d'utiliser l'algèbre \mathcal{G}_3 dans le domaine fréquentiel si l'on souhaite une analyse globale des couleurs en utilisant une transformée de Fourier unique, ainsi que dans le domaine spatial. C'est d'ailleurs dans celui-ci que sera présentée une approche de détection de contours basée sur la manipulation géométrique des couleurs dans l'espace. Ainsi nous utiliserons comme base le gradient de saturation défini dans le chapitre 3 et nous l'améliorerons en utilisant des caractéristiques géométriques obtenues par l'utilisation du produit géométrique.

La conclusion nous amènera alors à discuter des différentes perspectives issues de ce travail.

MODÉLISATION DES COULEURS PAR LES NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes sont utilisés de manière systématique à travers la définition de la transformée de Fourier qui est un outil de base dans l'analyse et le traitement des images numériques. Une des premières pistes que nous avons suivies au cours de cette thèse a consisté à chercher si l'utilisation de ce formalisme pouvait être généralisé à l'étude des images couleur. C'est pour cela que ce premier chapitre est consacré à l'évaluation du potentiel fourni par les nombres complexes pour l'analyse des données contenues dans les images numériques couleur.

La première partie consistera à redécouvrir brièvement comment sont définis les nombres complexes. Puis, la transformée de Fourier discrète à deux dimensions, qui permet de caractériser le contenu fréquentiel des images numériques en niveaux de gris, sera présentée. Ensuite, afin de pouvoir définir un outil d'analyse des images couleur utilisant les complexes nous étudierons les caractéristiques numériques d'un espace couleur approprié. Celui-ci sera enfin associé à la connaissance de l'analyse fréquentielle dans la définition d'une transformée de Fourier complexe chromatique que nous étudierons en détail afin de savoir si elle permet d'analyser et/ou de traiter les images couleur de manière pertinente.

2.1 Les Complexes

On rappelle qu'un nombre complexe, noté $z \in \mathbb{C}$, est défini de manière unique $z = a + ib$. a, b sont des réels, tandis que i est le nombre imaginaire pur tel que $i^2 = -1$. Dans ce chapitre, nous nous servirons des notions classiques de parties réelle/imaginaire, conjugué, notation exponentielle, module, argument, formes cartésienne/trigonométrique/exponentielle.

2.1.1 Plan complexe

2.1.1.1 Historique

Jean-Robert Argand, mathématicien amateur suisse, est le premier à proposer de représenter une interprétation géométrique des nombres complexes comme points dans le plan en 1806 en faisant correspondre au nombre $a + ib$ le point de coordonnées (a, b) [1]. Ce n'est seulement que lorsque ces travaux furent repris par Gauss et Cauchy que la communauté accepta cette nouvelle idée. Pour cela le plan complexe est aussi bien nommé comme le plan d'Argand que celui de Cauchy.

Le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est appelé *plan complexe*. $z = a + ib$ est représenté par le point $M = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$. On dit que M est *l'image* de z , ou encore que z est *l'affixe* de M , ou du vecteur \vec{OM} .

De plus, la longueur OM vaut le module ρ de z , et une mesure de l'angle orienté (\vec{e}_1, \vec{OM}) est l'argument θ de z .

Les coordonnées du point M dans le repère cartésien sont donc (a, b) tandis qu'elles sont (ρ, θ) dans le repère polaire comme nous l'illustrons dans la figure 2.1.

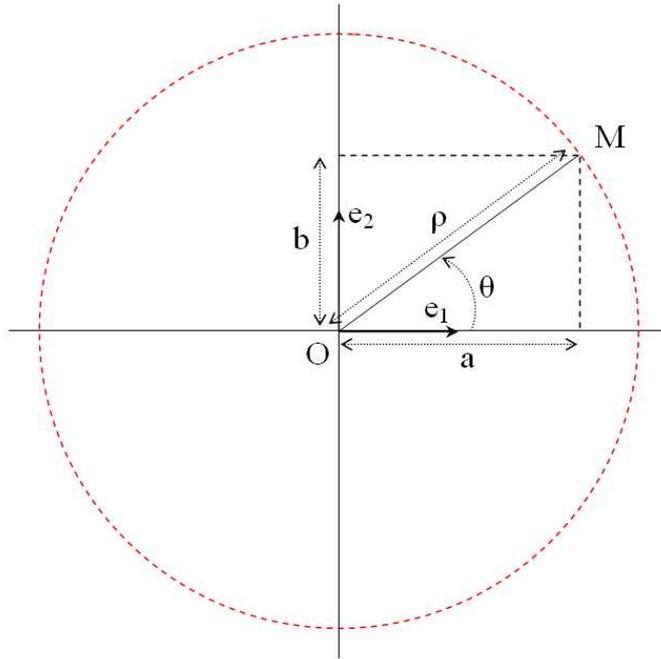


FIG. 2.1 – Le plan complexe

Après avoir défini les nombres complexes de manière générale, nous allons maintenant les utiliser dans le cadre du traitement des signaux et des images.

L'une des transformations les plus utilisées dans l'analyse des images numériques est la transformée de Fourier, la section suivante permet de redécouvrir l'analyse de signaux bidimensionnels en utilisant cette transformation. Celle-ci sera utilisée comme base de compréhension de l'information fréquentielle lors de la généralisation de la transformée de Fourier aux signaux multi-spectraux que nous utiliserons avec les images couleur.

2.2 Transformées de Fourier pour les signaux bi-dimensionnels

Les travaux de Joseph Fourier (1768-1830) ont permis de résoudre les équations de propagation de la chaleur dans les corps solides [33]. La méthode utilisée démontre que toute fonction finie $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (autrement dit : $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < +\infty$), peut se décomposer en une somme infinie de fonctions en sinus et en cosinus. Par ce moyen, la transformée de Fourier permet de décrire dans le domaine fréquentiel un signal temporel par les fréquences de sinus et cosinus qui le constituent. On appelle cette représentation du signal son spectre de fréquence.

Les signaux bi-dimensionnels sont des fonctions à deux dimensions, souvent notées x et y . On s'en sert notamment pour décrire les images. En effet celles-ci sont des signaux à au moins deux dimensions non plus temporelles comme dans le cas des signaux sonores 1D par exemple mais spatiales car permettant de décrire des positions dans le plan. Les images informatiques sont une version discrète de signaux

2D qui sont échantillonnés puis quantifiés. Elles sont stockées par exemple dans un tableau ou une matrice d'intensités. Généralement, pour chaque point d'une image en niveaux de gris, aussi appelé pixel¹, on quantifie l'intensité lumineuse par un entier codé sur un octet, donc de valeur comprise entre 0 et 255.

On peut appliquer une transformée de Fourier sur une image en niveaux de gris afin de connaître l'équivalent en fréquence de l'information contenue dans l'image spatiale. On choisit alors souvent d'afficher le résultat d'une telle transformée de Fourier au moyen d'une autre image en niveaux de gris. On affiche en fonction des besoins le module, la phase, la partie réelle ou la partie imaginaire de la matrice complexe représentant le résultat de la transformation de Fourier de l'image d'origine.

Dans la suite de ce chapitre, nous définirons une transformée de Fourier chromatique appliquée aux images couleur. Afin de comprendre l'information spectrale obtenue par une transformée de Fourier utilisant un signal non plus réel comme pour les images en niveaux de gris mais bien complexe, la partie réelle et la partie imaginaire seront utilisées, nous allons cependant d'abord revoir brièvement les principes de l'analyse de Fourier pour les signaux 2D.

2.2.1 Transformée de Fourier 2D discrète

La transformée de Fourier 2D est donc souvent employée dans le domaine des images. Elle permet en effet de passer d'une représentation du domaine spatial dans le cadre des images (coordonnées (x, y)) à une représentation dans le domaine fréquentiel (coordonnées (u, v)).

La transformée discrète de Fourier d'une séquence 2D correspondant au signal discret $f[x, y]$, défini sur \mathbb{Z}^2 , s'exprime sous la forme :

$$F[u, v] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f[x, y] \cdot e^{-2i\pi(ux+vy)} \quad (2.1)$$

En pratique, une image $f[m, n]$ est un ensemble de points fini et borné, avec m et n entiers et $0 \leq m \leq M - 1$ et $0 \leq n \leq N - 1$, par exemple. La transformée de Fourier discrète d'un signal 2D échantillonné ou TFD2D est donc donnée par :

$$F[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m, n] \cdot e^{-2i\pi(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N})} \quad (2.2)$$

avec $0 \leq o \leq M - 1$ et $0 \leq p \leq N - 1$

Les deux variables o et p représentent les fréquences « spatiales » de l'image selon les directions horizontales et verticales respectivement. Elles s'expriment en cycles ou en radians par unité de longueur, alors que les fréquences « temporelles » qui sont utilisées pour des signaux temporels s'expriment en cycles ou en radians par unité de temps.

On peut calculer la transformée de Fourier de deux façons différentes :

- Soit on calcule cette transformée directement à partir de la formule précédente ;
- Soit on effectue un calcul en deux temps. D'abord une transformée de Fourier 1D sur chaque vecteur colonne de l'image, et ensuite une transformée de Fourier 1D sur chaque ligne obtenue précédemment.

On calcule la transformée de Fourier discrète inverse 2D ou TFDI2D de la manière suivante :

$$f[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} F[o, p] \cdot e^{2i\pi(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N})} \quad (2.3)$$

¹Pour *picture element*, le plus petit élément de l'image.

2.2.2 Bases de l'interprétation des transformées de Fourier à deux dimensions

2.2.2.1 Transformée de Fourier 2D avec des images en niveaux de gris

Dans le plan spatial, pour représenter une image, chacun de ses pixels sera codé par un nombre entier ou réel qui représente l'intensité lumineuse du pixel en niveau de gris par exemple. En revanche le spectre est à valeurs complexes. De par cette nature complexe, ces pixels possèdent une amplitude et une phase, on peut choisir de représenter soit l'une soit l'autre. En général, on choisit plutôt l'amplitude que l'on affiche à travers le logarithme. Ce logarithme atténue les différences de module et permet ainsi d'obtenir une meilleure lisibilité du spectre.

2.2.2.2 Analyse de signaux 2D en sinus et cosinus

La transformée de Fourier 2D d'une image représente le degré de ressemblance entre l'image et les fonctions cosinus et sinus à différentes fréquences.

Dans la figure 2.2, la première image représente un cosinus horizontal de huit cycles et la deuxième un cosinus vertical de 32 cycles. Chaque transformée de Fourier pour ces deux images est théoriquement constituée de trois points :

- Le point central représente la moyenne de l'intensité de l'image d'origine. D'une façon générale, dans une image, l'information basse fréquence (autour du point central de la TF) code globalement les formes de l'image. Ces formes seront floues si l'on ne conserve que les basses fréquences. C'est en rajoutant de l'information à plus haute fréquence que ces formes se distinguent par des contours de plus en plus nets.
- Les deux autres points représentent la fréquence (horizontale à gauche ou verticale à droite) constituant les signaux. Il apparaît les deux pics en symétrie. Plus la fréquence d'oscillation des signaux est importante et plus les pics caractérisant cette fréquence dans le spectre sont éloignés du point central d'origine.

Cependant, il apparaît pour les deux images le phénomène de fenêtrage appelé généralement en image « effets de bords ». Les effets de bords se manifestent dans les spectres de nos deux images par de nombreux autres pics d'amplitude réduite sur la ligne horizontale à gauche ou verticale à droite. Ces lignes correspondent au sinus cardinal.

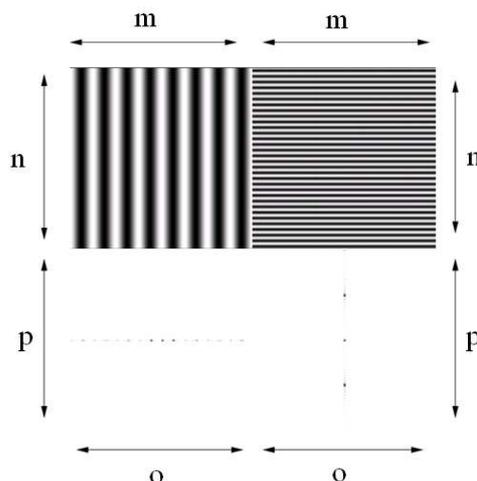


FIG. 2.2 – Première ligne : Images en cosinus ; deuxième ligne : le module de leur transformée de Fourier (les spectres sont inversés pour la lisibilité)

2.2.2.3 Effets de bord

Nous pouvons interpréter géométriquement le phénomène de bord ; en effet la transformée de Fourier considère l'image traitée comme un élément de motif d'une image de taille infinie contenant ce motif de manière périodique. La figure 2.3 montre comment peut être considérée une image contenant un cosinus oscillant sur la diagonale (du point bas-gauche au point haut-droit). La même image est donc dupliquée autour de l'image d'origine et de manière périodique. La figure 2.3 ne présente que les juxtapositions à l'est, au sud et au sud-est de l'image d'origine en haut à gauche. Il faut imaginer que cette juxtaposition se fait dans toutes les directions et de manière infinie. On remarque que sur la zone de passage d'une image à sa voisine il apparaît une rupture franche. Cette rupture est due au fait que la fenêtre ne coupe pas notre cosinus sur un nombre de périodes complètes selon les directions horizontales x et verticales y .

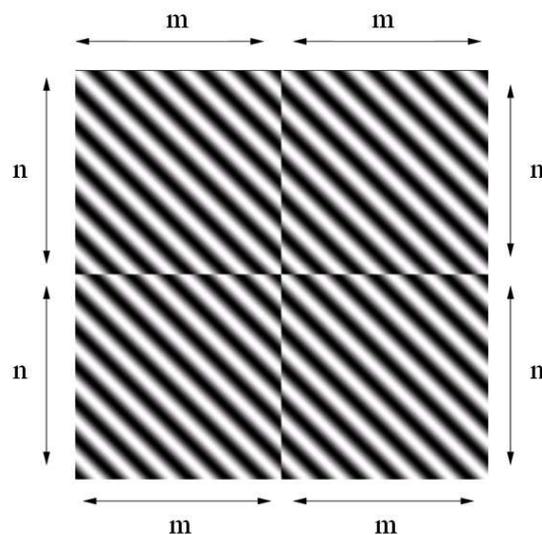


FIG. 2.3 – Périodicité englobante de la TF et apparition de zones de rupture

La figure 2.4 illustre ces effets de bords : ainsi pour chacune des images, on voit apparaître sur le spectre un sinus cardinal suivant la direction perpendiculaire aux ruptures de l'image d'origine.

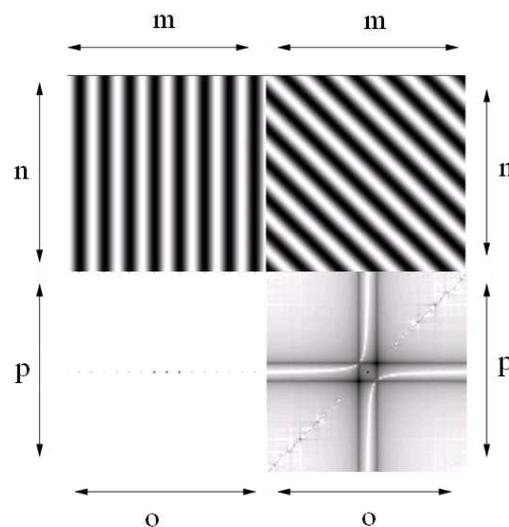


FIG. 2.4 – Effets de bord ; Première ligne : cosinus horizontal à gauche et diagonal à droite ; deuxième ligne : les modules de leur TF (les spectres sont inversés pour la lisibilité).

Une manière de contourner ce problème est de « lisser » les bords de l'image pour atténuer les zones de rupture. Pour lisser l'image, on multipliera celle-ci par une fenêtre de type gaussienne, par exemple, qui conservera inchangée le centre de l'image, et atténuera les bords.

La figure 2.5 nous montre les différences obtenues à partir du même signal en cosinus diagonal. On calcule trois transformées de Fourier de manière différente.

- en haut à droite le spectre de l'image d'origine sans modification ;
- en haut à gauche le signal d'origine multiplié par une gaussienne pour lisser les ruptures sur les bords de l'image ;
- en bas à gauche le spectre obtenu avec ce lissage gaussien ;
- en bas à droite le spectre idéal obtenu s'il n'y avait pas d'effets de bord.

On remarque que les effets de bords du spectre obtenu après lissage de l'image d'origine par une gaussienne sont atténués. Cependant cette opération entraîne une imprécision dans le spectre. En effet, alors que le spectre en bas à droite de la figure 2.5 permet de distinguer clairement la fréquence constituant notre cosinus diagonal, les pics de fréquences dans le module du spectre de l'image lissée sont moins nets du fait du produit de convolution avec la gaussienne dans le domaine des fréquences.

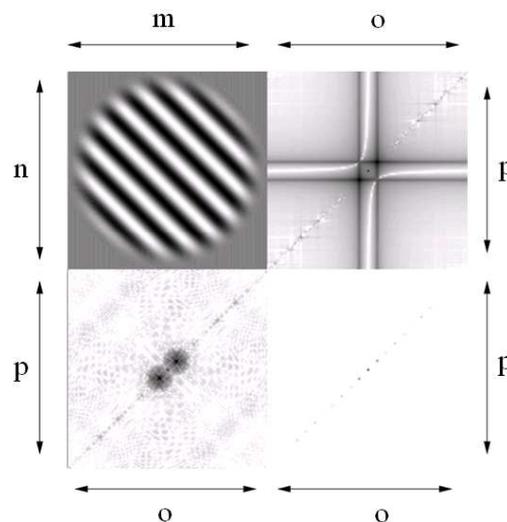


FIG. 2.5 – Diminution des effets de bord (les spectres sont inversés pour la lisibilité).

2.2.2.4 Transformées de Fourier d'images naturelles

La transformée de Fourier² de la figure 2.6 comporte les deux lignes horizontale et verticale passant par l'origine dues aux effets de bords des images naturelles. Cela dit, il est difficile d'interpréter plus d'informations contenues dans le spectre d'énergie d'images complètes tant les détails fourmillent. Le spectre de l'image du babouin présente cependant des pics d'intensité de manière symétrique dans les coins. Ces pics d'amplitude se situent dans les hautes fréquences et pourraient donc correspondre par exemple au pelage du babouin. En effet, ce pelage est caractérisé par de l'information de texture qui est donc présente dans les hautes fréquences.

2.2.2.5 Notion de contours et de texture dans le domaine fréquentiel

La transformée de Fourier peut être un outil intéressant pour détecter certaines informations spatiales contenues dans des images. Par exemple les contours qui représentent des ruptures franches seront

²On devrait plutôt dire le module de la transformée de Fourier mais comme l'affichage d'une TF est le plus souvent une image en niveaux de gris représentant le module, on emploie parfois la transformée de Fourier pour n'exprimer en fait que son module

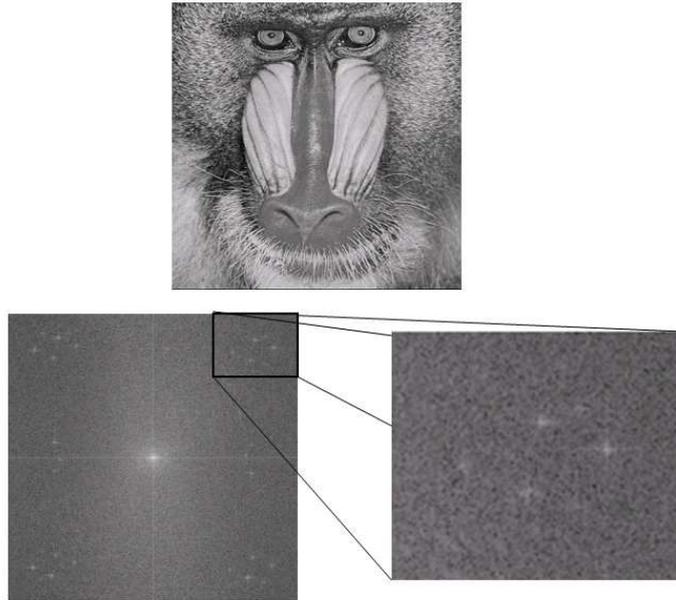


FIG. 2.6 – TF d’une image naturelle : le babouin et son spectre avec en plus un zoom sur les fréquences intéressantes.

traduits par de l’information dans les fréquences hautes du spectre de l’image. En effet localement au niveau de cette rupture, le signal peut être vu comme la fonction porte dont la TF est un sinus cardinal. Il va donc apparaître dans le spectre un sinus cardinal perpendiculaire à la rupture (fonction porte) du domaine spatial (cf. figure 2.7). Bien que le spectre contienne des informations correspondant aux ruptures spatiales, il n’est cependant pas possible de déterminer une quelconque localisation géométrique de ces ruptures car le spectre ne contient en effet que de l’information fréquentielle. Autrement dit, si l’information spatiale de rupture est traduite dans les hautes fréquences du spectre de l’image, le module du spectre ne fait apparaître que la perpendiculaire aux directions porteuses de toutes les accumulations de ruptures qui suivent cette direction dans le domaine spatial.

La figure 2.7 permet aussi d’illustrer comment les informations de texture apparaissent au sein du spectre. Une texture peut être par définition un motif qui se reproduit avec une certaine fréquence. Cette fréquence sera donc logiquement visible dans le spectre correspondant à l’image texturée. On retrouve donc dans le spectre du mur qui est zoomé des lignes horizontales et verticales qui correspondent à la répétition de ruptures verticales et horizontales rencontrées. Il faut faire attention cependant car certains pics d’amplitude fréquentielle peuvent aussi être dus au sinus cardinal caractéristique des ruptures franches. Finalement, on comprend qu’il n’est pas facile d’interpréter l’information du spectre d’une image naturelle même texturée.

2.2.2.6 Filtres de fréquence

L’implication directe de l’analyse du spectre est la définition de filtres avec des supports définis dans le domaine fréquentiel. On peut ainsi se concentrer sur les fréquences que l’on souhaite conserver par l’opération de filtrage pour effectuer des tâches de traitement d’images.

Le filtrage peut se caractériser par une « boîte noire ». Cette boîte possède une entrée e et une sortie s dans le domaine spatial. Dans le domaine fréquentiel, le filtrage correspond au produit du spectre d’entrée $E[o, p]$ à la fonction fréquentielle du filtre $H[o, p]$. Ce produit fréquentiel correspond à un produit de convolution dans le domaine spatial.

Pour un signal discret 2D, le filtrage dans le domaine fréquentiel est exprimé de la façon suivante :

$$S[o, p] = E[o, p].H[o, p] \quad (2.4)$$

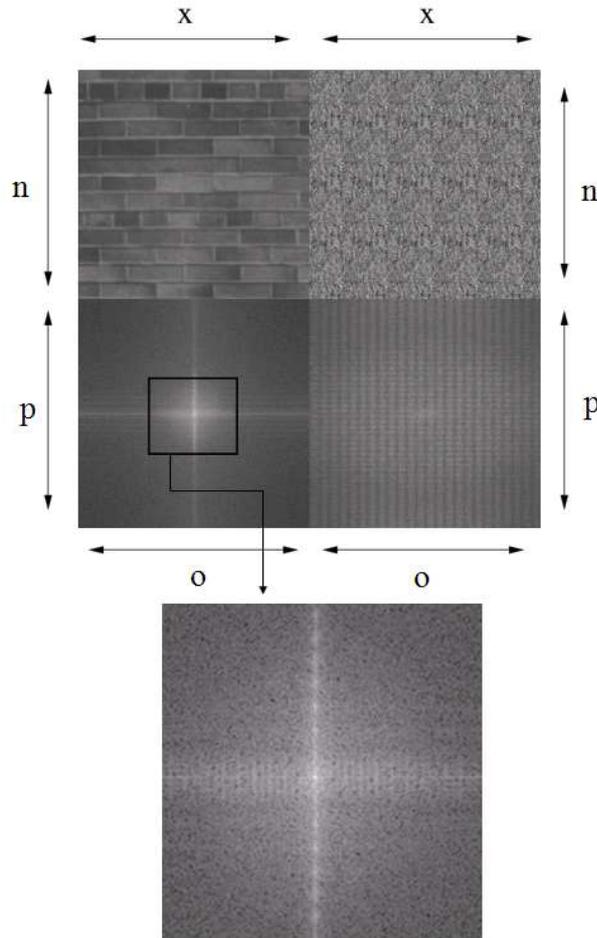


FIG. 2.7 – Deux images texturées (en haut) et leur spectre respectif (en bas).

Ce qui est équivalent à la relation suivante dans le domaine spatial :

$$s[m, n] = (e * h)[m, n] = \sum_{m_0} \sum_{n_0} e[m - m_0, n - n_0] h[m_0, n_0] \quad (2.5)$$

La fonction $h[m, n]$ est appelée « la réponse impulsionnelle » du filtre 2D (ou « masque »).
Étudions donc maintenant quelques filtres.

Passe-Bas L'application d'un filtre passe-bas sur une image permet de lisser les bruits et de conserver les formes grossières de celle-ci. Cela revient également à multiplier son spectre par une fenêtre qui ne laisse passer que les basses fréquences. La figure 2.8 illustre ce principe en montrant les différences entre l'image originale à gauche et l'image filtrée à droite en première ligne ainsi que leur spectres respectifs en seconde ligne. Les contours des objets ou des formes représentant des ruptures d'intensités dans le domaine spatial sont portés entre autre par les hautes fréquences de l'espace fréquentiel. En appliquant un filtrage passe-bas on atténue donc ces détails et l'image filtrée devient plus floue comme l'image de droite le montre. Notons que nous voyons apparaître des oscillations du fait du fenêtrage dans le domaine fréquentiel.

Passe-Haut L'opération duale s'appelle le filtrage passe-haut. Il permet de faire ressortir les détails de l'image filtrée comme des contours ou des textures. La figure 2.9 illustre ce type de filtrage avec de gauche à droite l'image originale et l'image filtrée en première ligne ainsi que leur spectre en seconde. L'image de Lenna filtrée est dépourvue de ses régions homogènes cependant les bords ou les éléments de

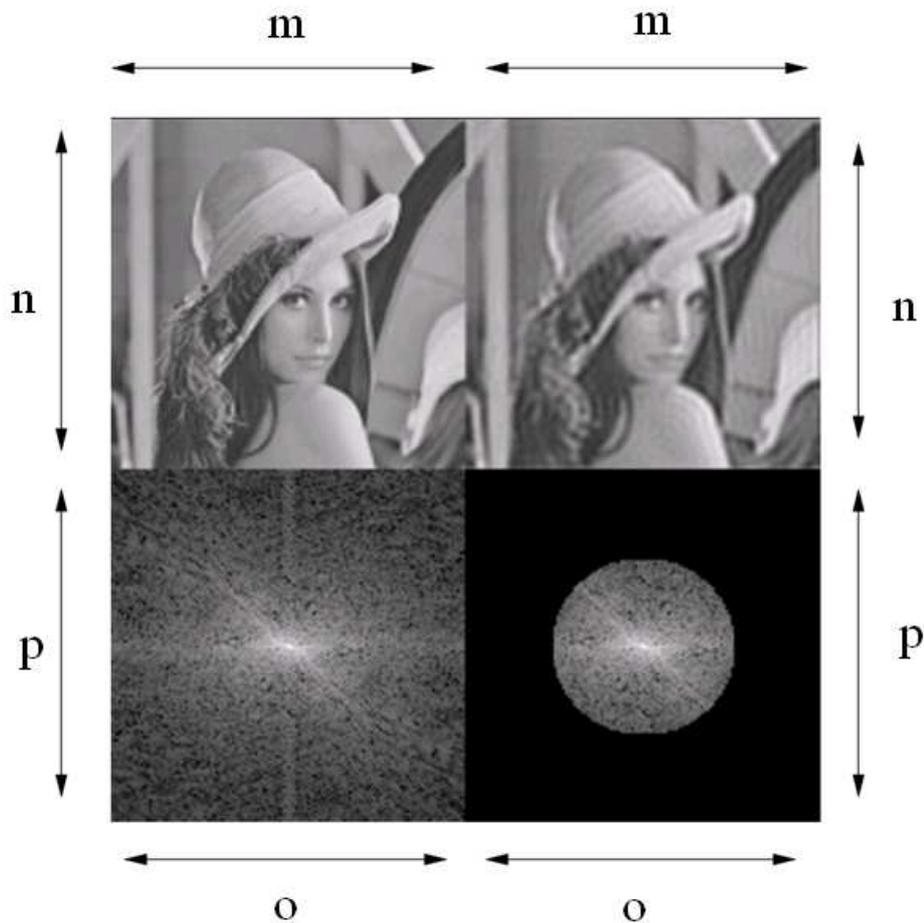


FIG. 2.8 – Illustration d'un filtrage passe-bas

texture, comme les plumes de son chapeau par exemple sont réhaussés confirmant leur caractère « haute fréquence ».

Enfin, il existe le filtrage passe-bande, une solution intermédiaire qui permet de conserver l'information sélectionnée dans le spectre d'une image sur une bande de fréquence choisie.

Tout comme nous l'avons fait avec des signaux 1-D, nous venons de voir qu'il est possible de représenter des images de manière fréquentielle avec la transformée de Fourier. Les premiers traitements numériques effectués sur les images une fois le spectre caractérisé sont les filtrages en fréquences. Ainsi il est possible de ne conserver que l'information d'une image sur la bande de fréquence de son choix. Cependant, nous voulons rajouter à cette analyse spectrale la notion de couleur qui pour l'instant n'a pas été abordée. En effet nous n'avons appliqué l'analyse de Fourier que sur des images en niveaux de gris et souhaitons étendre la caractérisation spectrale aux données vectorielles caractérisant les images couleur. Pour cela, nous devons avant tout étudier différents espaces couleur afin d'en déterminer un qui permettrait de définir une transformée de Fourier adaptée aux images numériques couleur.

2.3 Espaces Couleur

Afin de pouvoir coder des images en couleur, nous avons besoin d'étudier au préalable comment on exprime de manière générale la couleur numériquement. La couleur est une information que l'on peut décrire avec au minimum trois composantes, elle est donc par nature vectorielle. On peut manipuler les

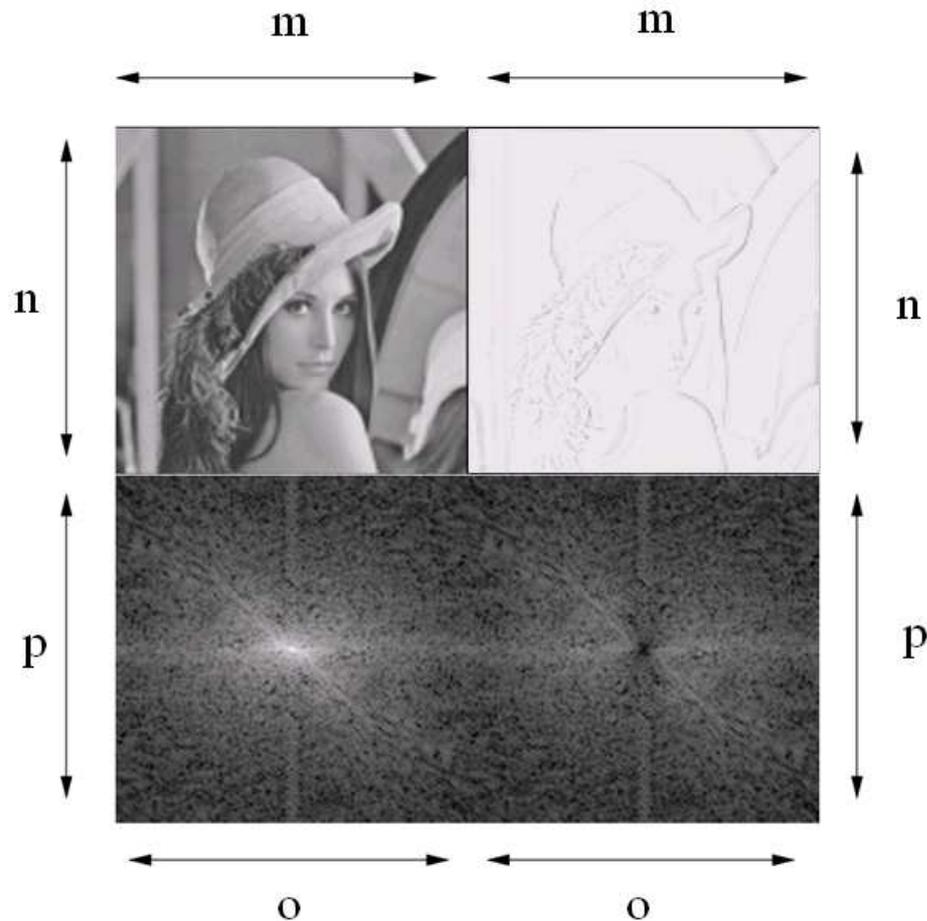


FIG. 2.9 – Illustration du filtrage passe-haut

couleurs au moyen d'opérations vectorielles dans un espace en trois dimensions que l'on appellera espace couleur. Les espaces couleur ont fait l'objet de nombreuses recherches et certains ont été normalisés par la Commission Internationale de l'Éclairage (CIE). L'éclairage étant un élément important pour pouvoir reconnaître des couleurs et les comparer, des standards d'éclairage ont aussi été mis au point par la CIE [70].

Lors de cette étude, nous avons choisi d'étudier certains espaces couleur de façon numérique. Cette démarche se distingue de la démarche adoptée par de nombreux auteurs qui se basent sur les espaces couleur théoriques pour effectuer leur travaux. Ils utilisent pour effectuer leurs traitements d'images couleur les conversions entre l'espace couleur matériel RGB et des espaces couleur définis de manière théorique. Nous voulons également effectuer des opérations sur des images en utilisant différents espaces couleur, cependant nous souhaitons comprendre comment s'opèrent les transitions numériques entre ces différents espaces. Pour cela, nous avons fait une analyse en deux temps :

- présentation de différents espaces couleur tels qu'ils nous sont présentés habituellement ;
- étude numérique de deux d'entre eux à savoir RGB et YUV .

2.3.1 Les espaces de primaires

2.3.1.1 Espace RVB ou RGB

Cet espace est l'espace le plus utilisé en traitement d'image. Il est constitué de trois composantes, celles-ci codées en général sur huit bits. En fait, cet espace est celui utilisé par le matériel informatique produisant ou affichant des images. Les images utilisent les trois composantes suivantes : R pour rouge,

V pour vert et enfin B pour bleu. Plusieurs définitions cohabitent pour l'espace RVB car l'expression des primaires qui le composent n'est pas unique. Cependant on utilise plus souvent le standard $CIE RGB$ (cf. figure 2.10) (pour red, green et blue) défini en 1931 par la CIE [15]. Les trois composantes primaires monochromatiques de couleur rouge, verte et bleue sont chacune associée à une longueur d'onde :

- 700.0 nm pour le rouge ;
- 546.1 nm pour le vert ;
- 435.8 nm pour le bleu.

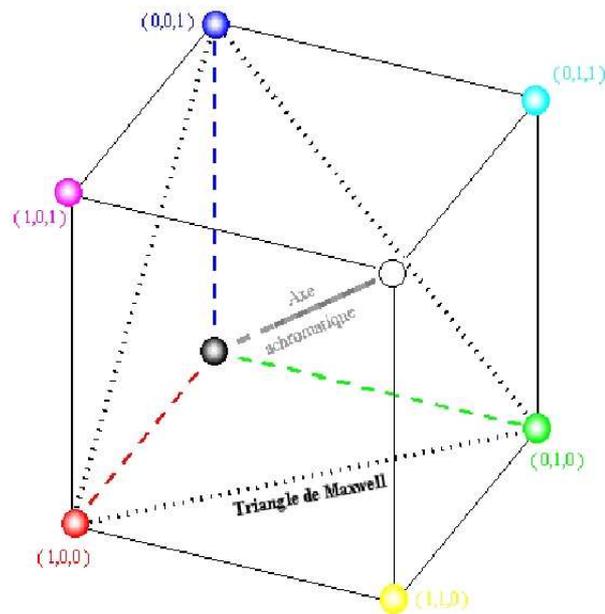


FIG. 2.10 – Cube RGB

2.3.1.2 Espace XYZ

L'espace couleur RGB défini par la CIE présente l'inconvénient de posséder une partie négative dans le spectre des couleurs visibles (cf. figure 2.11). Autrement dit, il n'est pas possible de représenter toutes les couleurs si on souhaite utiliser le principe de la synthèse additive qui n'utilise que des valeurs positives. Pour combler ces inconvénients, la CIE a défini un espace de représentation de la couleur basé sur trois primaires non visibles X , Y et Z . Dans cet espace, chaque primaire est définie par une fonction colorimétrique qui prend des valeurs de longueur d'onde positive (cf. figure 2.12). Notons que la fonction $Y(\lambda)$ représente approximativement la sensibilité de l'œil humain à la luminosité.

Le passage de l'espace RGB à l'espace XYZ s'effectue par une transformation linéaire dont les coefficients dépendent du blanc de référence choisi [69].

2.3.1.3 Espace CMY ou CMJ

L'espace CMY ou CMJ^3 est l'espace dédié à l'impression des couleurs. L'encre imprimée absorbe de la lumière et en renvoie moins que la feuille blanche, l'impression utilise donc le principe de la synthèse soustractive. Cet espace couleur est donc représenté par un cube comme l'espace RGB mais l'origine est le blanc au lieu du noir et les axes sont le cyan, le magenta et le jaune qui sont les trois primaires de la synthèse soustractive. Le passage entre RGB et CMY est donné par :

³ CMY en anglais pour cyan, magenta et yellow ou CMJ en français pour cyan, magenta jaune.

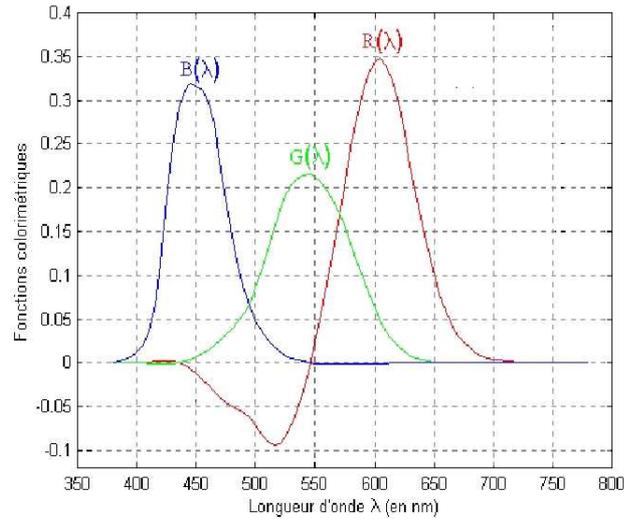


FIG. 2.11 – Les fonctions colorimétriques $R(\lambda)$, $G(\lambda)$ et $B(\lambda)$ de l'espace RGB .

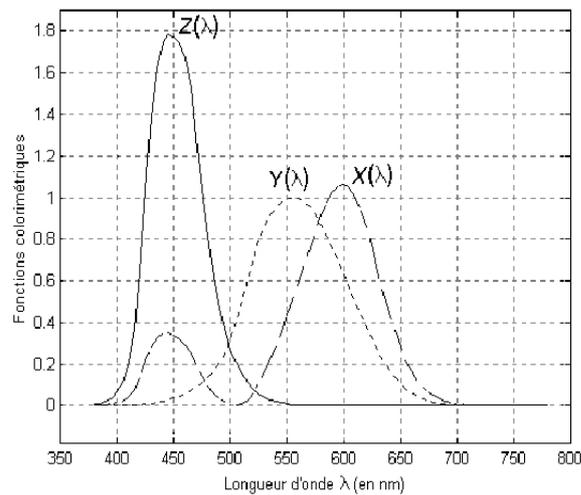


FIG. 2.12 – Les fonctions colorimétriques $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ et $Z(\lambda)$ de l'espace XYZ .

$$\begin{cases} C = 1 - R \\ M = 1 - G \\ Y = 1 - B \end{cases} \quad (2.6)$$

2.3.2 Les espaces dédiés à la télévision

Le passage de la diffusion des programmes en noir et blanc à la couleur sur les nouveaux postes entre les années 1950 et 1960 a été possible grâce à la définition de standards de télévision. Ces standards devaient permettre la diffusion en couleur sur les nouveaux postes mais aussi conserver la possibilité d'afficher des programmes diffusés en noir et blanc. Il fallait aussi assurer la compatibilité avec les anciens modèles et pouvoir afficher en noir et blanc des programmes diffusés en couleur. Pour cela l'information de couleur diffusée par les chaînes de télévision sépare la luminosité et la chrominance. On obtient l'information de luminosité directement à partir de la composante Y de l'espace XYZ et les

deux autres parties de chrominances sont des combinaisons linéaires des composantes de l'espace RGB . Différentes définitions cohabitent et distinguent les différents espaces couleur utilisés en télévision.

2.3.2.1 Espace YIQ

L'espace YIQ est celui défini par le standard de télévision $NTSC$ dans les années 1950, il utilise une combinaison linéaire de l'espace RGB défini lui aussi dans le standard $NTSC$ (National Television Standards Committee) et qui diffère de l'espace RGB défini par la CIE dont nous avons parlé précédemment. Ce standard de télévision est destiné aux formats vidéo 525 lignes/60 Hz ; pour les DVD, la résolution est de 480 lignes. Le $NTSC$ est utilisé en Amérique du Nord, dans une partie de l'Amérique du Sud ($NTSC - M$) et de l'Asie dont le Japon ($NTSC - J$).

La chrominance étant composée de deux informations élémentaires : $U=R-Y$ (différence de rouge) et $V=B-Y$ (différence de bleu), il faut théoriquement deux porteuses pour véhiculer l'information. Pour n'en utiliser qu'une seule, le signal est modulé en amplitude et en phase avec une seule porteuse.

2.3.2.2 Espace YUV

L'espace YUV est l'espace couleur défini par le standard allemand PAL (Phase Alternation by Line) en utilisant le blanc de référence D_{65} ⁴. Les composantes de chrominances sont définies à partir de combinaisons linéaires pondérées de R , G et B en fonction du blanc et de l'observateur de référence. C'est un standard de la télévision européenne à 25 images secondes en 625 lignes (576 seulement sont affichées car 8% des lignes servent à la synchronisation). Il est utilisé principalement en Europe de l'Est, mais également en Australie, et dans certaines régions d'Afrique et d'Amérique Latine. Même si d'autres matrices de transposition peuvent être trouvées dans la littérature (les différences étant basées sur les illuminants utilisés), la transformation utilisée pour passer de RGB à YUV dans la suite de cette étude est la suivante :

$$\begin{bmatrix} Y \\ U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.472854 & 1.423527 & -0.043981 \\ -0.607735 & -1.141775 & 0.75891 \\ 0.585846 & -0.393292 & 0.044646 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.3.2.3 Espace YD_rD_b

L'espace YD_rD_b est défini par le standard de télévision $SECAM$ (SEquentiel Couleur A Memoire). Il est utilisé en France à partir de 1967, en Russie et dans des pays d'Afrique avec des normes spécifiques supplémentaires. Ce format est aussi destiné aux formats vidéo 625 lignes mais cette fois pour un rafraichissement de 50Hz. Le principe est basé là encore sur des modulations de phase et d'amplitude pour pouvoir faire passer les trois composantes sur une seule porteuse.

2.3.2.4 Espace YC_rC_b

L'espace YC_rC_b est le standard international dédié au codage digital des images de la télévision numérique. Il fait actuellement partie du nouveau standard de compression JPEG 2000. L'espace YC_rC_b est différent des autres standards de télévision car il n'impose aucune règle quant au blanc de référence. Notons que la composante de luminosité est la même que dans les autres standards de télévision.

⁴Un illuminant est défini par une répartition spectrale relative d'énergie, qui n'est pas nécessairement fournie directement par une source de lumière ni obligatoirement réalisable à l'aide d'une source. Plusieurs illuminants ont été standardisés par la CIE, ils sont souvent définis par une lettre allant de A à F . Les illuminants D correspondent par exemple à différentes lumières du jour, alors que les F correspondent aux lumières émises par des lampes fluorescentes. Le standard de télévision $NTSC$ de la section précédente est défini pour un illuminant C correspondant à une lumière moyenne du jour.

2.3.3 Les espaces perceptuels

Les espaces perceptuels tendent à correspondre à la perception humaine des couleurs. Une couleur sera associée à une primaire (rouge, vert, bleu, etc.), un taux de blanc (clair, foncé, etc.) et la pureté de la primaire (pastelle, délavée, etc.). Les espaces perceptuels reprennent ces descriptions en séparant l'information de couleur en teinte, saturation et intensité (ou encore clarté).

2.3.3.1 Le modèle de Munsell

Ce modèle colorimétrique, qui a été redéfini par la société américaine d'optique (Optical Society of America) en 1943, a été introduit initialement par Munsell en 1898. Ce modèle ressemble aux systèmes perceptuels utilisés de nos jours mais il possède des composantes beaucoup plus faiblement échantillonnées. La teinte (hue) est divisée en dix valeurs qui correspondent aux teintes suivantes : rouge R, jaune-rouge YR, jaune Y, jaune-vert GY, vert G, bleu-vert BG, bleu B, bleu-pourpre PB, pourpre P et rouge-pourpre RP. Les abréviations précédentes sont données en anglais telles qu'elles ont été définies par Munsell (cf. figure 2.13a). La figure 2.13b montre qu'un secteur peut être subdivisé en sous-sections pour une meilleure précision. Dans ce cas, un numéro précédera le label donné à la section (3YR par exemple).

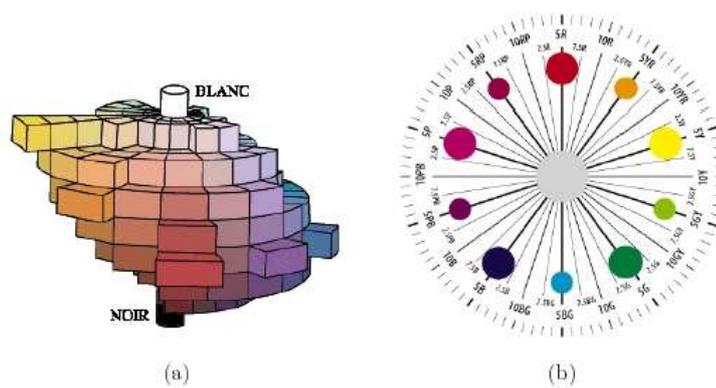


FIG. 2.13 – Modèle colorimétrique de Munsell représentant les couleurs en teinte, saturation et clarté. (a) représentation sous forme solide ; (b) représentation circulaire.

2.3.3.2 Le système de coordonnées triangulaires *HSI* ou *TSI*

Ce modèle est utilisé communément en traitement d'images couleur. Sa modélisation est issue de la déformation du cube des couleurs *RGB*. A partir du cube *RGB*, on obtient l'axe achromatique des intensités *I* en suivant l'axe qui relie le noir au blanc. Ensuite on obtiendra les composantes chromatiques par une position sur un palier circulaire où la saturation *S* représente le rayon et la teinte *T* ou *H* (hue en anglais) représente l'angle.

Les formules exprimant la transformation de l'espace *RGB* à l'espace *HSI* sont données par :

$$\begin{cases} H = \arccos \left(\frac{0.5 \times (R - G) + (R - B)}{\sqrt{(R - G)^2 + (R - B)(G - B)}} \right) \\ S = 1 - \frac{3 \times \min(R, G, B)}{R + G + B} \\ I = \frac{R + G + B}{3} \end{cases} \quad (2.8)$$

2.3.3.3 Le système de cône hexagonal *HSV* et *HSL*

Le système *HSV*, défini par Travis, est équivalent au système *HSI*, il diffère dans sa représentation qui est donnée sous la forme d'un cône hexagonal. Deux modèles peuvent être distingués : le modèle de cône hexagonal simple et le modèle hexagonal double (cf. figure 2.14). Ils représentent la couleur sous forme d'un triplet : teinte *H* (Hue), Saturation *S* et clarté *V* (Value).

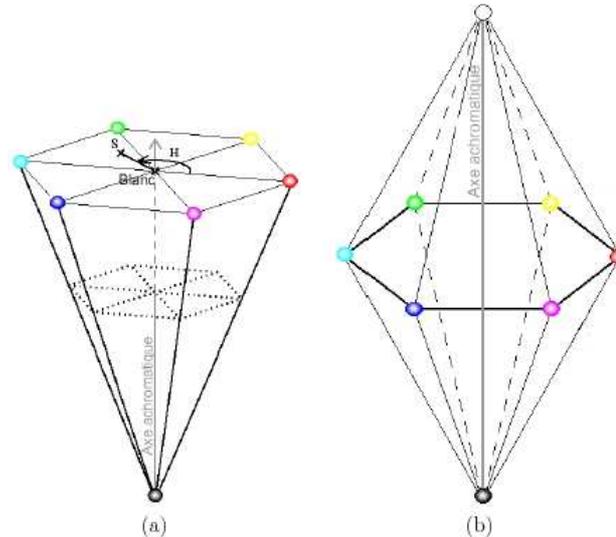


FIG. 2.14 – Le modèle hexagonal de Travis : (a) cône hexagonal simple *HSV* ; (b) cône hexagonal double *HSL*.

2.3.4 Les espaces perceptuellement uniformes

Les espace que nous avons vu précédemment ne répondent pas aux deux critères qui permettent de définir des espaces perceptuellement uniformes :

- la distance $d(c_1, c_2)$ entre les deux couleurs c_1 et c_2 est correcte, si et seulement si, la valeur issue de cette distance se rapproche de la différence perçue par l'œil humain ;
- la distance $d(c_i, c_1) = n * d(c_i, c_2)$ est correcte, si et seulement si, l'œil humain perçoit la couleur c_1 n -fois plus éloignée de la couleur c_i que la couleur c_2 .

Ici, la distance employée est la distance euclidienne. En 1976, la CIE a proposé deux espaces uniformes qui sont depuis reconnus et utilisés par la communauté comme standards. Ces deux espaces sont le *CIELab* (ou $L^*a^*b^*$) et le *CIELuv* (ou $L^*u^*v^*$).

2.3.4.1 Espace *CIELab*

Cet espace s'obtient par des relations non linéaires à partir du système *XYZ*. Le blanc de référence utilisé est caractérisé par les trois composantes trichromatiques (X_0, Y_0, Z_0) prises dans l'espace *XYZ*. Les trois composantes se comportent différemment. La composante L^* représente la clarté et les composantes a^* et b^* représentent respectivement l'opposition de couleur vert-rouge et l'opposition de couleur bleu-jaune.

On obtient la première composante L^* avec :

$$L^* = \begin{cases} 116 * \left(\frac{Y}{Y_0}\right)^{\frac{1}{3}} - 16 & \text{si } \frac{Y}{Y_0} > 0.008856 \\ 903.3 * \frac{Y}{Y_0} & \text{si } \frac{Y}{Y_0} \leq 0.008856 \end{cases} \quad (2.9)$$

On obtient ensuite les composantes chromatiques par :

$$\begin{cases} a^* = 500 \left[f\left(\frac{X}{X_0}\right) - f\left(\frac{Y}{Y_0}\right) \right] \\ b^* = 300 \left[f\left(\frac{Y}{Y_0}\right) - f\left(\frac{Z}{Z_0}\right) \right] \end{cases} \quad (2.10)$$

avec :

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{3}} & \text{si } x > 0.008856 \\ 7.787x + \frac{16}{116} & \text{si } x \leq 0.008856 \end{cases} \quad (2.11)$$

2.3.4.2 Espace $CIEL_{uv}$

La composante L^* représente encore la clarté qui est la même que dans l'espace $L^*a^*b^*$ (cf. équation 2.9) ainsi que des composantes u^* et v^* qui représentent respectivement l'opposition de couleurs vert-rouge et l'opposition de couleur bleu-jaune. Ces composantes chromatiques sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} u^* = 13L^*(u' - u'_0) \\ v^* = 13L^*(v' - v'_0) \end{cases} \quad (2.12)$$

où les quantités u' , v' , u'_0 , v'_0 sont calculées comme suit :

$$\begin{cases} u' = \frac{4X}{X + 15Y + 3Z} \\ v' = \frac{9Y}{X + 15Y + 3Z} \\ u'_0 = \frac{4X_0}{X_0 + 15Y_0 + 3Z_0} \\ v'_0 = \frac{9Y_0}{X_0 + 15Y_0 + 3Z_0} \end{cases} \quad (2.13)$$

2.3.5 Les espaces couleur indépendants

Ces espaces reposent sur une décomposition des composantes couleur de manière à obtenir trois composantes couleur décorréelées.

2.3.5.1 L'espace $X_1X_2X_3$

Cet espace est obtenu à partir d'une analyse en composantes principales (ACP). Cette méthode appliquée aux composantes de l'espace RGB permet de décorréler les informations sur trois composantes X_1 , X_2 et X_3 qui pourront donc être traitées indépendamment. La première valeur est celle qui possède la plus grande quantité d'information et elle correspond à la clarté. Les deux autres composantes, nécessaires à la description complète de la couleur, apportent de l'information supplémentaire mais avec un apport décroissant. On remarque cependant que cette décomposition de l'information couleur utilisant l'analyse en composante principale sera dépendante de chaque image, en effet les couleurs deux images différentes se décomposeront suivant des axes différents avec l'ACP.

2.3.5.2 L'espace d'Otha ou l'espace $I_1I_2I_3$

Cet espace a été introduit par Otha [51] dans les années 80. Il est lui aussi basé sur la transformation de Karhunen-Loeve (un autre nom pour la décomposition en composantes principales) afin de déterminer

les trois axes de plus grande variance de l'ensemble des couleurs. Ici I_1 correspond à la composante d'intensité et I_2 et I_3 représentent respectivement les oppositions bleu-rouge et magenta-vert. On obtient les composantes de cet espace par une transformation linéaire à partir de l'espace RGB définie par les formules suivantes :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{R + G + B}{3} \\ I_2 = \frac{R - B}{2} \\ I_3 = \frac{2G - R - B}{4} \end{cases} \quad (2.14)$$

Maintenant que nous avons présenté différents espaces couleur connus et utilisés par la communauté, nous allons étudier numériquement l'un d'entre eux qui nous servira par la suite dans une étude fréquentielle numérique utilisant les nombres complexes.

2.3.6 Étude numérique de l'espace YUV

En traitement d'image, l'affichage, le stockage des images est donc souvent codé dans l'espace RGB , chaque composante étant stockée sur 8 bits variant ainsi entre 0 et 255. Nous avons une compréhension globale physique de cet espace, car elle correspond à la sensation colorée qui arrive sur notre rétine et qui est reçue par les trois familles de cônes L , M et S respectivement sensibles aux longueurs d'onde proches du rouge, du vert et du bleu. Ce codage se comprend aussi intuitivement, ainsi, par exemple, si on fixe $R = 0$ et $B = 0$ on comprend qu'en faisant varier la dernière composante entre 0 et 255, la couleur variera du vert sombre au vert clair. Ceci n'est pas vrai pour des espaces plus évolués comme YUV . Nous avons donc voulu faire apparaître les liens entre les variations numériques des coefficients et les variations physiques ou d'aspect (couleur). Pour cela, nous fixons une ou plusieurs composantes et nous étudions comment réagit la couleur (celle que l'on voit) face à une variation numérique de la dernière composante.

Prenons l'espace YUV , cet espace est défini sur un domaine de définition qui est différent de celui de l'espace RVB . Ce que nous cherchons à comprendre c'est comment se déplacent les points numériques aux couleurs extrêmes des espaces qui leur sont associés. En effet, au cours du changement d'espace, la manipulation numérique va déplacer géométriquement des points de l'espace couleur d'origine pour qu'ils puissent être définis dans l'espace couleur d'arrivée. En effectuant un changement d'espace à partir de RVB dont chacune des composantes est codée sur huit bits, nous obtenons les bornes suivantes pour l'espace YUV :

$$\begin{aligned} Y_{min} &\sim -11 & Y_{max} &\sim 483 \\ U_{min} &\sim -446 & U_{max} &\sim 193 \\ V_{min} &\sim -100 & V_{max} &\sim 160 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Comme la définition de l'espace YUV nous indique que la composante Y est une information d'intensité uniquement (ainsi que les autres espaces contenant cette composante), nous avons écarté Y et nous avons caractérisé de manière numérique la chromaticité avec les composantes U et V .

La figure 2.15 représente le cube de couleur RGB en fonction des valeurs de Y , de U et de V . En analysant cette figure, on remarque qu'il existe des valeurs de U et V dans leur intervalle de définition pour lesquelles les couleurs RGB correspondantes ne sont pas définies (par exemple le $(U, V) = (-400, -80)$ et ceux quelquesoit Y . Il existe donc des valeurs de U et de V telles que $U \in [-447; 194]$ et $V \in [-101; 161]$ où la transposition en RGB ne sera pas « cohérente⁵ ».

La figure 2.15 nous indique que si l'on fait varier par exemple U entre 0 et 100 avec un V fixé à 30 et Y quelconque (puisque qu'il ne contient pas d'information de chrominance), nous devons obtenir une variation de couleur dont la teinte sera bleue. Nos expérimentations nous ont montré que les couleurs

⁵une couleur sera dite « cohérente » lorsque la conversion de sa représentation de YUV vers RGB sera un triplet inclus dans $[0; 255]^3$

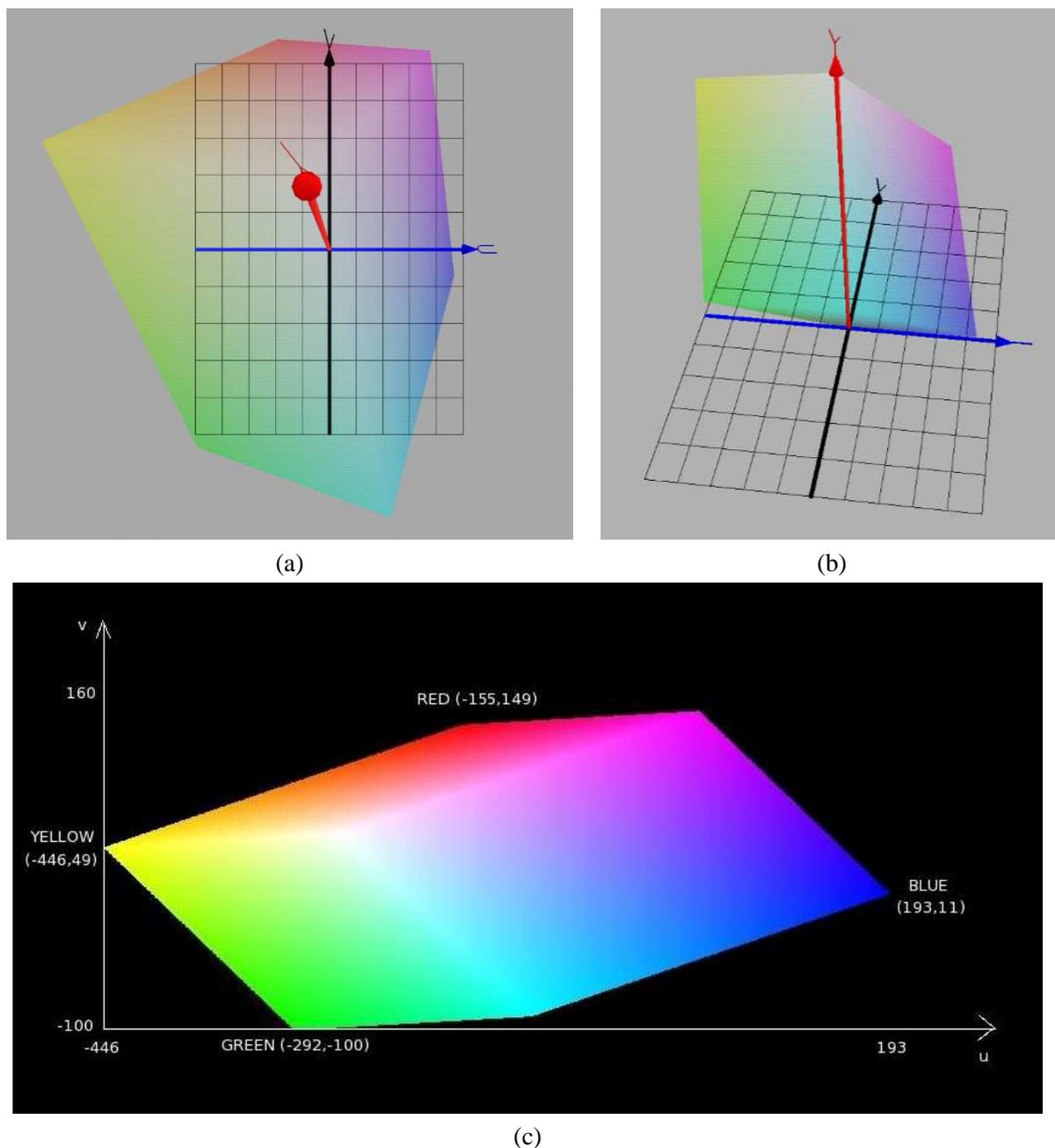


FIG. 2.15 – (a) et (b) Les couleurs du cube RGB en fonction de Y , U et V ; (c) projection sur un plan UV

obtenues ne sont pas forcément celles attendues. La figure 2.16 illustre des variations couleur obtenues en fixant une valeur pour V et en faisant varier la composante U (les variations de U sont faites en suivant la direction verticales des images). On remarque que ces variations de couleur diffèrent en fonction de la composante Y . De plus, il apparaît des sauts de couleurs dans deux des imageries qui sont liés au fait que la correspondance entre l'espace YUV et l'espace numérique RGB n'est pas maintenue au cours des variations de U sur ces deux exemples.

Afin de montrer que la composante Y correspondant à la clarté joue un rôle dans la perception colorée, nous avons donc réétudié l'espace YUV , en effectuant des variations de couleur en modifiant uniquement les composantes de chromaticité, la composante Y restant fixe.

En réitérant cette méthode pour différents Y choisis entre les bornes de son ensemble de définition, c'est à dire entre -11 et 483 , on obtient la correspondance entre les couleurs RGB et les composantes

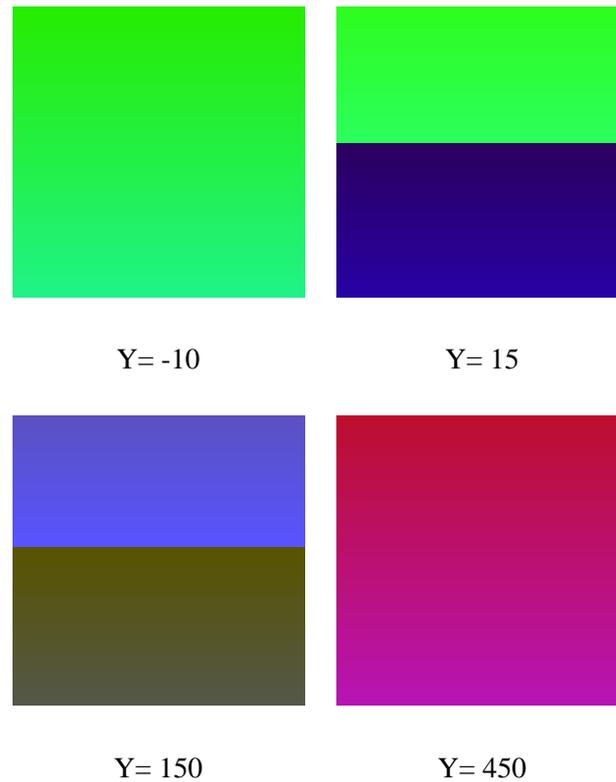


FIG. 2.16 – Dans toutes les imagettes de cette figure on a la même variation de U entre 0 et 100 et V fixé à 30, cependant les variations couleur sont différentes en fonction d' Y .

U et V pour chaque Y donné. Les figures 2.17 à 2.18 illustrent cette correspondance avec différentes valeurs de Y .

On remarque finalement que suivant Y , toutes les couleurs de l'espace numérique RGB ne sont pas définies sur le plan UV . Les figures 2.17 à 2.18 illustrent donc que les couleurs numériques de RGB dépendent de la composante Y . En effet les bleus sont définis plutôt sur $Y = [0 ; 150]$, les rouges sur $Y = [100 ; 200]$, les verts sur $Y = [200 ; 350]$ et enfin les jaunes sur $Y = [350 ; 460]$.

L'analyse numérique de l'espace YUV nous a permis de confirmer que la composante Y qui est une combinaison linéaire des composantes R , G , et que B n'est donc bien pas uniquement de l'information d'intensité mais elle contribue également à la formation et à la perception colorée. Ceci montre que la définition théorique n'est pas vérifiée en pratique.

2.4 Analyse spatio-chromatique d'images couleur

Les variations de couleur dans l'espace YUV étant acquises, nous allons pouvoir nous en servir dans cette section pour traiter l'analyse spatio-chromatique d'images couleur. En effet, ici sera décrit comment des variations géométriques de couleur peuvent être détectées dans le plan fréquentiel couleur UV . Pour cela, nous effectuons l'analyse fréquentielle numérique d'un espace couleur proposé initialement par McCabe et al. [48] pour décrire les contrastes de couleur. Dans cette analyse, le formalisme des complexes est utilisé pour définir un espace fréquentiel couleur. L'analyse de l'information fréquentielle sera faite en utilisant une notion de chemin couleur. On pourra ensuite utiliser l'information de l'espace de Fourier couleur pour décrire les images couleur.

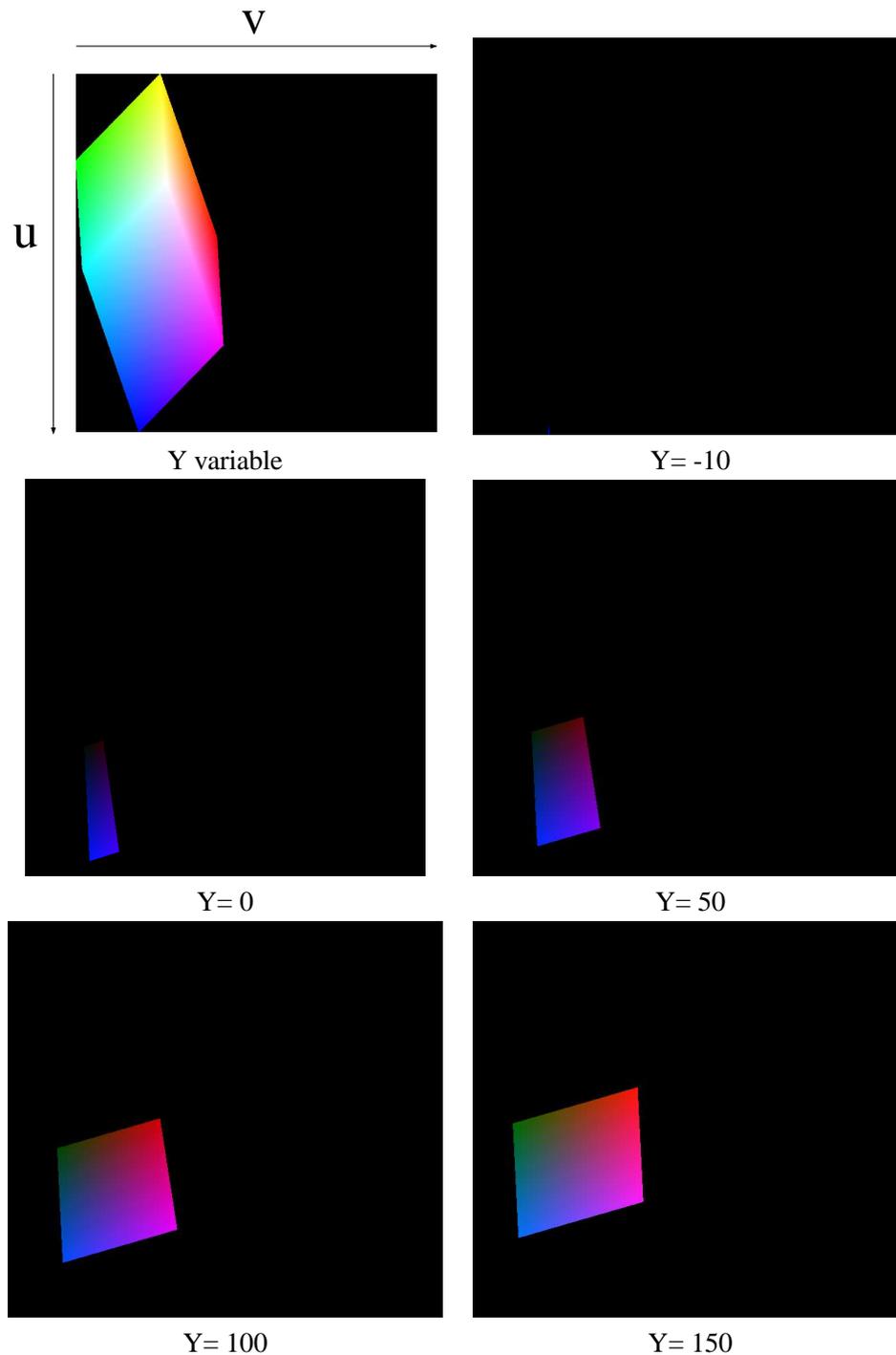


FIG. 2.17 – Les couleurs en fonction de U et V avec différents Y .

2.4.1 La transformation de Fourier spatio-chromatique

L'utilisation de la transformée de Fourier dans l'analyse d'image n'est pas nouvelle comme nous l'avons vu dans la partie sur les transformées de Fourier. Pour les images couleur, la transformation doit être appliquée sur une image composée d'un ensemble de pixels à valeurs vectorielles. Il est proposé de se placer dans un espace couleur qui idéalement sera indépendant de l'intensité afin de pouvoir effectuer des opérations uniquement sur les composantes chromatiques de l'image. Une représentation en nombres complexes est utilisée : la partie réelle étant allouée pour représenter l'une des composantes chromatiques pour chaque pixel, la composante imaginaire représentant l'autre.

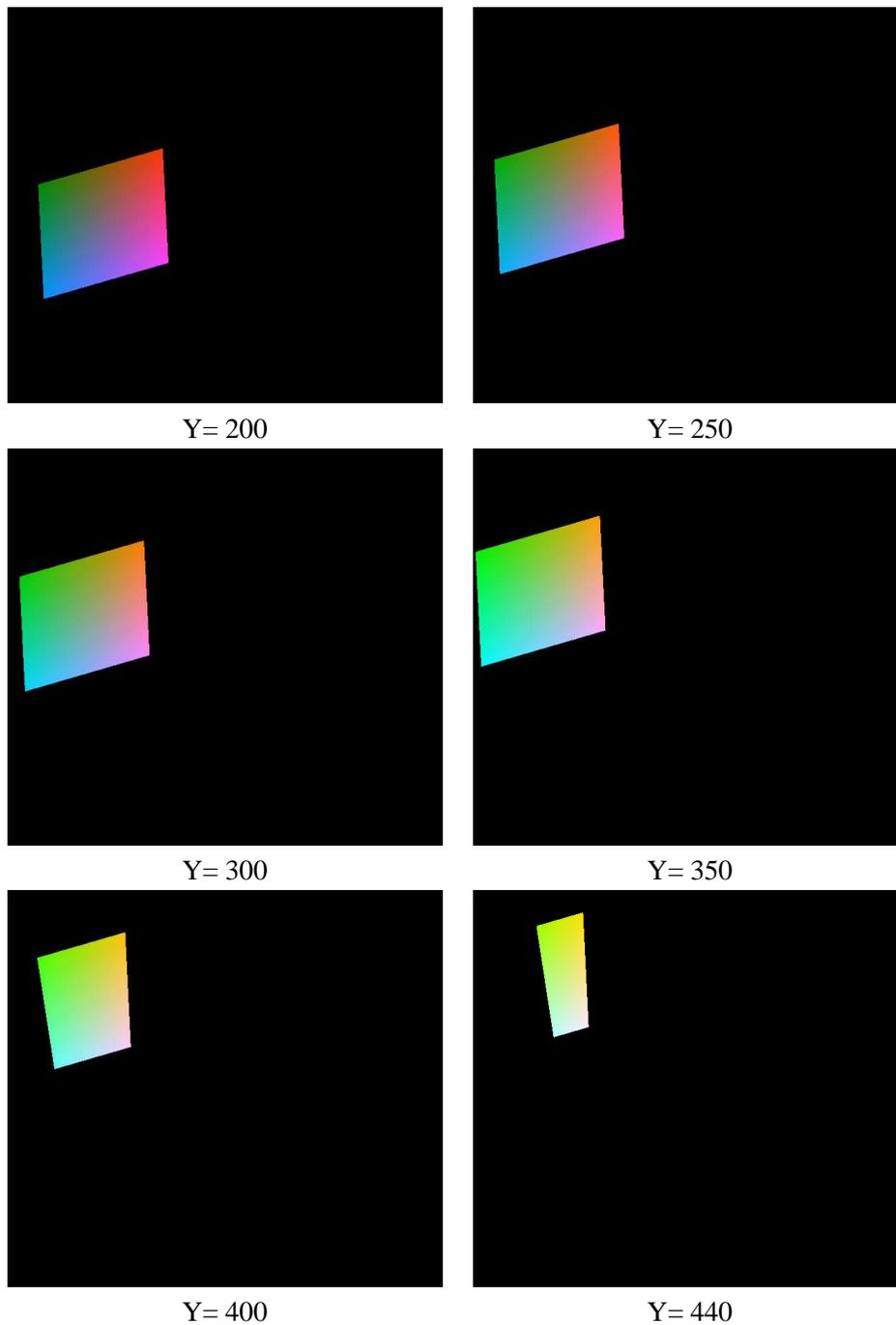


FIG. 2.18 – Les couleurs en fonction de U et V avec différents Y (suite).

Théoriquement l'espace couleur YUV peut représenter un tel espace et c'est pour cela qu'il a été choisi pour les expérimentations de McCabe et Caelli [48]. En chaque pixel de l'image, nous définissons un nombre complexe codant l'information couleur suivant :

$$u[m, n] + iv[m, n] \quad (2.16)$$

Le couple (m, n) correspond aux coordonnées spatiales de l'image d'où $u[m, n]$ et $v[m, n]$ sont les deux composantes chromatiques de l'image au point de coordonnées (m, n) (avec le pixel de coordonnées $(0, 0)$ dans le coin haut gauche de l'image).

La transformation de Fourier chromatique est définie pour les composantes u et v ⁶ des pixels d'une image obtenue à partir d'une conversion de l'espace RGB vers YUV . Nous obtenons pour chaque pixel ses composantes fréquentielles complexes chromatiques U et V avec la définition de la transformée de Fourier suivante :

$$U[o, p] + iV[o, p] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (u[m, n] + iv[m, n]) e^{\frac{-2i\pi(mo+np)}{N}} \quad (2.17)$$

On suppose ici que l'image est de taille $N \times N$. Le couple (o, p) correspond aux coordonnées fréquentielles de la transformée de Fourier de l'image, ces coordonnées sont mesurées en cycles par pixel. Les valeurs U et V au point de coordonnées (o, p) déterminent l'intensité fréquentielle qui décrit comment la couleur change spatialement dans l'image.

Puisque les données de départ sont complexes, notons qu'à la suite de la transformée de Fourier, la symétrie hermitienne disparaît, c'est-à-dire que des fréquences opposées, comme par exemple $U[o_0, p_0]$ et $U[-o_0, -p_0]$ (resp. $V[o_0, p_0]$ et $V[-o_0, -p_0]$), peuvent avoir des amplitudes complètement différentes (avec o_0 et p_0 entre 0 et $\frac{N}{2}$ et en supposant le centre du repère au centre de l'image) (cf. figure 2.19).

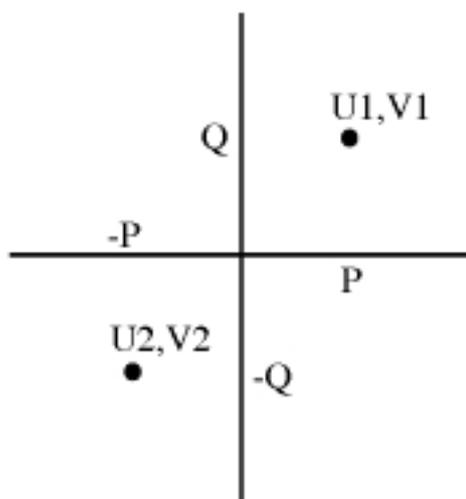


FIG. 2.19 – Représentation du plan complexe fréquentiel couleur

Nous proposons dans la suite de cette partie d'essayer de donner une signification à l'information fréquentielle obtenue par cette transformée de Fourier chromatique comme nous l'avons fait avec les images en niveaux de gris.

2.4.1.1 Notion de chemin couleur

Une interprétation de l'espace fréquentiel obtenu à partir de la transformée de Fourier complexe contenant les composantes chromatiques u et v est proposée par McCabe et all. [48] en utilisant la notion de chemin couleur (cf. figure 2.20). Nous proposons tout d'abord d'illustrer cette notion de chemin à partir de deux images élémentaires présentant une seule valeur non nulle dans le domaine fréquentiel.

⁶Notation : on choisira dans cette partie de représenter les composantes couleur spatiales d'un pixel en minuscule tandis que les majuscules seront utilisées pour le domaine fréquentiel.

$$\begin{aligned}
\text{Image 1 : } |U[o, p] + iV[o, p]| &= k \text{ pour } (o, p) = (o_0, p_0) \\
&= 0 \text{ sinon} \\
\text{Image 2 : } |U[o, p] + iV[o, p]| &= k \text{ pour } (o, p) = (-o_0, -p_0) \\
&= 0 \text{ sinon}
\end{aligned}$$

avec $k \in \mathbb{R}$ une constante.

La transformation de Fourier chromatique inverse de cette matrice s'exprime par :

$$u[m, n] + iv[m, n] = \frac{1}{N} \sum_{o=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} (U[o, p] + iV[o, p]) e^{(2i\pi \frac{om+pn}{N})} \quad (2.18)$$

Après TF inverse, le résultat de telles initialisations dans le domaine des fréquences est une matrice complexe décrivant les composantes u et v de l'image dans le domaine spatial. Cette matrice est ensuite associée à une composante de clarté fixe pour donner une image couleur. Cette image couleur décrit une variation spatiale de couleurs correspondant à l'initialisation effectuée dans le domaine spectral (l'initialisation sera effectuée aux coordonnées de fréquence (o_0, p_0) déterminant le nombre d'oscillations du signal dans le domaine spatial : plus ces paramètres o_0 et p_0 seront élevés, plus il y aura d'oscillations). Chaque variation de couleur balaye ce qui est appelé un « chemin » circulaire à travers l'espace des couleurs [48]. Ces chemins couleur sont définis par deux paramètres d'initialisation qui sont les suivants :

- θ qui est « l'angle couleur » de départ ;
- m qui est le rayon de balayage du chemin représentant l'amplitude de la variation de couleur.

Ces deux paramètres sont définis à partir des valeurs des coefficients fréquentiels initiaux $U[o_0, p_0]$, $U[-o_0, -p_0]$, $V[o_0, p_0]$ et $V[-o_0, -p_0]$ de la transformée de Fourier complexe par :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{V[o_0, p_0]}{U[o_0, p_0]} \right) \quad (2.19)$$

$$m = \sqrt{U[o_0, p_0]^2 + V[o_0, p_0]^2} \quad (2.20)$$

L'initialisation de ces paramètres définit le sens de balayage de la couleur. Le sens trigonométrique est caractérisé par une initialisation aux coordonnées (o_0, p_0) et le sens anti-trigonométrique aux coordonnées $(-o_0, -p_0)$.

Nous proposons d'illustrer cette notion de chemin couleur en effectuant une initialisation dans le domaine des fréquences. Nous souhaitons initialiser des valeurs U et V aux points (o_0, p_0) et/ou $(-o_0, -p_0)$ du plan complexe spectral chromatique et ensuite par une transformée de Fourier inverse retrouver à quoi correspondent ces initialisations dans l'image résultat. Nous devrions ainsi retrouver des variations de couleur ayant des caractéristiques semblables aux chemins de couleurs décrits par McCabe et all.

Supposons donc que l'on crée une matrice complexe de dimension $N \times N$ et que l'on initialise les points (o_0, p_0) et $(-o_0, -p_0)$ à une certaine valeur.

On fera attention aux changements de repère : en effet lorsque l'on voit des coordonnées opposées comme (o, p) et $(-o, -p)$, celles-ci sont exprimées dans un repère où le centre de l'image représente le point de coordonnées $(0, 0)$ correspondant à sa moyenne. Cependant la définition donnée par l'équation (2.18) de l'inverse de la transformée de Fourier ne travaillant que sur des fréquences positives, il est préférable d'utiliser la version de la TF dans laquelle les coordonnées sont centrées :

$$u[m, n] + iv[m, n] = \frac{1}{N} \sum_{o=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} (U[o, p] + iV[o, p]) e^{(2i\pi \frac{om+pn}{N})} \quad (2.21)$$

A partir de cette définition, on peut développer le calcul :

$$\begin{aligned}
u[m, n] + iv[m, n] &= \frac{1}{N} \sum_{o=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{p=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} (U[o, p] + iV[o, p]) \\
&\quad \times \left[\cos \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) + i \sin \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{o=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{p=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[U[o, p] \cos \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) + iU[o, p] \sin \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) \right] \\
&\quad + \left[iV[o, p] \cos \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) - V[o, p] \sin \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) \right] \\
&= \frac{1}{N} \sum_{o=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{p=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[U[o, p] \cos \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) - V[o, p] \sin \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) \right] \\
&\quad + \left[iU[o, p] \sin \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) + V[o, p] \cos \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) \right]
\end{aligned}$$

d'où :

$$u[m, n] = \frac{1}{N} \sum_{o=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{p=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[U[o, p] \cos \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) - V[o, p] \sin \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) \right] \quad (2.22)$$

$$v[m, n] = \frac{1}{N} \sum_{o=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{p=\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[U[o, p] \sin \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) + V[o, p] \cos \left(2\pi \frac{om + pn}{N} \right) \right] \quad (2.23)$$

La partie réelle (resp. imaginaire) obtenue après transformée de Fourier inverse est donc composée d'un cosinus (resp. sinus) associé à l'axe U et d'un sinus (resp. cosinus) associé à V .

Il est maintenant possible de décrire les différents cas de variation de couleur obtenus à partir d'initialisations dans le domaine fréquentiel.

Chemins couleur de même base fréquentielle Dans ce paragraphe, la notion de chemins couleur est illustrée par la juxtaposition des schémas qui leur sont associés et leur résultat en terme de variation couleur dans le domaine spatial. Tous les exemples seront donnés avec le même couple de coordonnées fréquentielle (o_0, p_0) et son équivalent dans les fréquences négatives $(-o_0, -p_0)$. De plus, on notera par un quadruplet toute combinaison de $(U[o_0, p_0], V[o_0, p_0], U[-o_0, -p_0], V[-o_0, -p_0])$ pour simplifier l'écriture.

Un premier exemple est donné avec la figure 2.20. La première ligne illustre dans des plans complexes les chemins couleur en fonction de leurs paramètres θ et m définis à l'équation (2.20). θ représente l'angle initial dans l'espace chromatique UV du chemin couleur alors que m est son amplitude. Ici sont représentés deux chemins couleur c_1 et c_2 , qui additionnés ensemble, permettent d'obtenir un troisième chemin c_3 . On remarque que les deux chemins c_1 et c_2 ont le même angle $\theta = 0$ et la même amplitude $m = k$. La particularité du troisième chemin est qu'il correspond en terme spatial à une variation de couleur qui suit l'axe u des réels, ce troisième chemin possède lui aussi les mêmes angles et amplitudes. La seconde ligne illustre les résultats obtenus après une transformée inverse. Ces images sont donc concrètement l'illustration spatiale des chemins couleur.

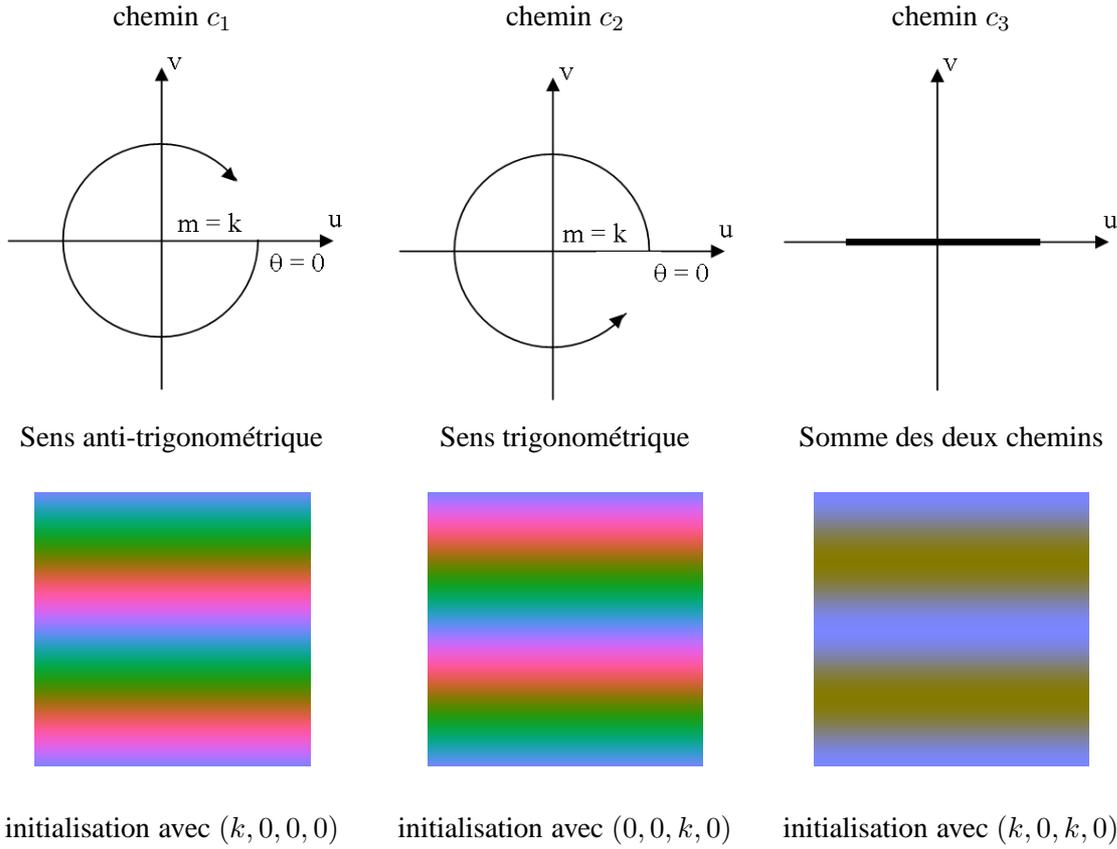


FIG. 2.20 – Le chemin couleur c_3 est obtenu à partir de la somme des chemins couleur c_1 et c_2 , il est décrit uniquement sur l'axe des réels.

Pour obtenir de telles variations de couleur, on initialise les composantes fréquentielles comme suit avec les quadruplets $(k, 0, 0, 0)$ pour les coordonnées positives (chemin c_1) et $(0, 0, k, 0)$ pour coordonnées négatives (chemin c_2), on obtient donc le chemin c_3 en utilisant le quadruplet $(k, 0, k, 0)$ avec $k \in \mathbb{R}$ pour l'initialisation fréquentielle. En utilisant la définition des paramètres de l'équation (2.20), on obtient $\theta = 0$ et $m = k$ pour les deux chemins c_1 et c_2 .

Avec les résultats précédents, en se rappelant que $\forall x \in \mathbb{R} \cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$, on obtient en passant par une transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}
 u[m, n] + iv[m, n] &= \frac{1}{N} \left[k \cos \left(2\pi \frac{o_0 m + p_0 n}{N} \right) - 0 \right] \\
 &+ i \frac{1}{N} \left[k \sin \left(2\pi \frac{o_0 m + p_0 n}{N} \right) + 0 \right] \\
 &+ \frac{1}{N} \left[k \cos \left(2\pi \frac{o_0 p + m_0 n}{N} \right) + 0 \right] \\
 &- i \frac{1}{N} \left[k \sin \left(2\pi \frac{o_0 m + p_0 n}{N} \right) + 0 \right] \\
 &= \frac{2k \cos \left(2\pi \frac{o_0 m + p_0 n}{N} \right)}{N}
 \end{aligned}$$

Ce résultat est décrit par un signal cosinusoïdal sur \mathbb{R} car il ne comporte pas de partie imaginaire et suit donc uniquement l'axe u . Ce résultat calculatoire est en adéquation avec la notion de chemins couleur proposée par McCabe qui concluait qu'avec une initialisation dans le domaine complexe des valeurs $U[o_0, p_0]$ et $U[-o_0, -p_0]$ à une valeur $k \in \mathbb{R}$ et en gardant les valeurs V nulles, on obtenait, après transformée de Fourier inverse, une variation de couleur suivant l'axe des réels dans le domaine

spatial, ce qui correspond à une variation entre le bleu et le jaune. On peut aussi interpréter l'information spectrale associée à ce chemin couleur. En effet, comme le signal obtenu est de type cosinusoidal, on peut dire que le chemin couleur c_3 correspond à des variations spatiales paires sur l'axe u , autrement dit les oppositions de couleur entre le bleu et le jaune.

De la même façon, une variation de couleur qui suit l'axe des imaginaires est possible en initialisant le spectre par le quadruplet $(0, k, 0, k)$ qui est la somme des deux chemins c_4 et c_5 d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ et d'amplitude $m = k$ caractérisés par les quadruplets $(0, k, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, k)$ illustrés à la figure 2.21. Chacun d'entre eux apportant un signal de type cosinus le résultat final décrivant le chemin couleur c_6 vaut :

$$u[m, n] + iv[m, n] = \frac{2k \cos\left(2\pi \frac{p_0 m + p_0 n}{N}\right)}{N} i \quad (2.24)$$

Cette fois ci, le chemin couleur est associé aux variations spatiales sur l'axe v autrement dit les oppositions de couleur entre le rouge et le vert.

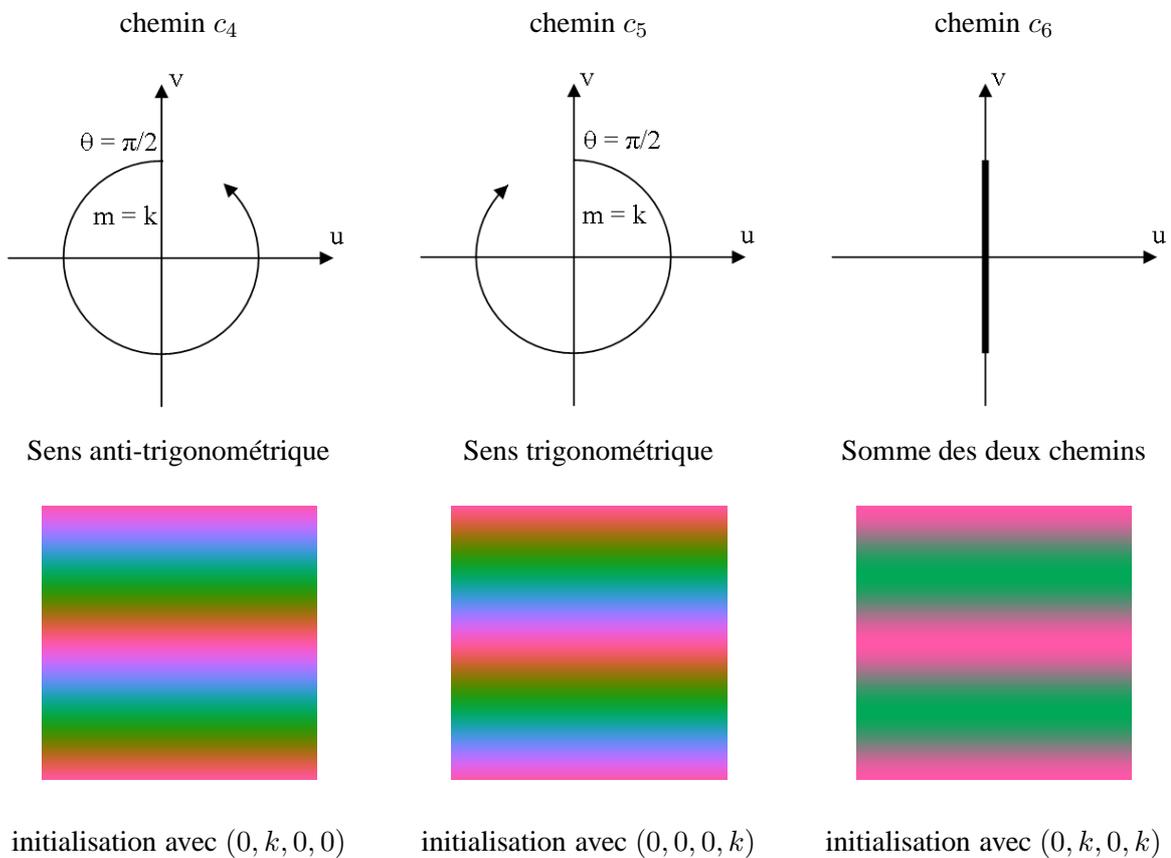


FIG. 2.21 – Le chemin couleur c_5 est obtenu à partir de la somme des chemins couleur c_4 et c_5 , il est décrit uniquement sur l'axe des imaginaires.

De même que les quadruplets $(k, 0, 0, 0)$ et $(0, 0, k, 0)$ (resp. $(0, k, 0, 0)$ et $(0, 0, 0, k)$) s'ajoutent pour former le quadruplet $(k, 0, k, 0)$ (resp. $(0, k, 0, k)$), on peut effectuer d'autres combinaisons :

- somme des quadruplets $(k, 0, 0, 0)$ et $(0, k, 0, 0)$: on obtient un chemin couleur correspondant au quadruplet $(k, k, 0, 0)$ dont l'angle vaut $\theta = \frac{\pi}{4}$ et l'amplitude vaut $m = k^2$. C'est le chemin c_7 illustré à gauche dans la figure 2.22.
- somme des quadruplets $(0, 0, k, 0)$ et $(0, 0, 0, k)$: on obtient un chemin couleur correspondant au quadruplet $(0, 0, k, k)$ dont l'angle et l'amplitude sont les mêmes que l'exemple précédent. C'est le chemin c_8 correspondant au schéma du milieu de la figure 2.22.
- le chemin c_9 à droite de la figure 2.22 correspond quand à lui à la somme des deux précédents et on peut donc lui associer le quadruplet (k, k, k, k) .

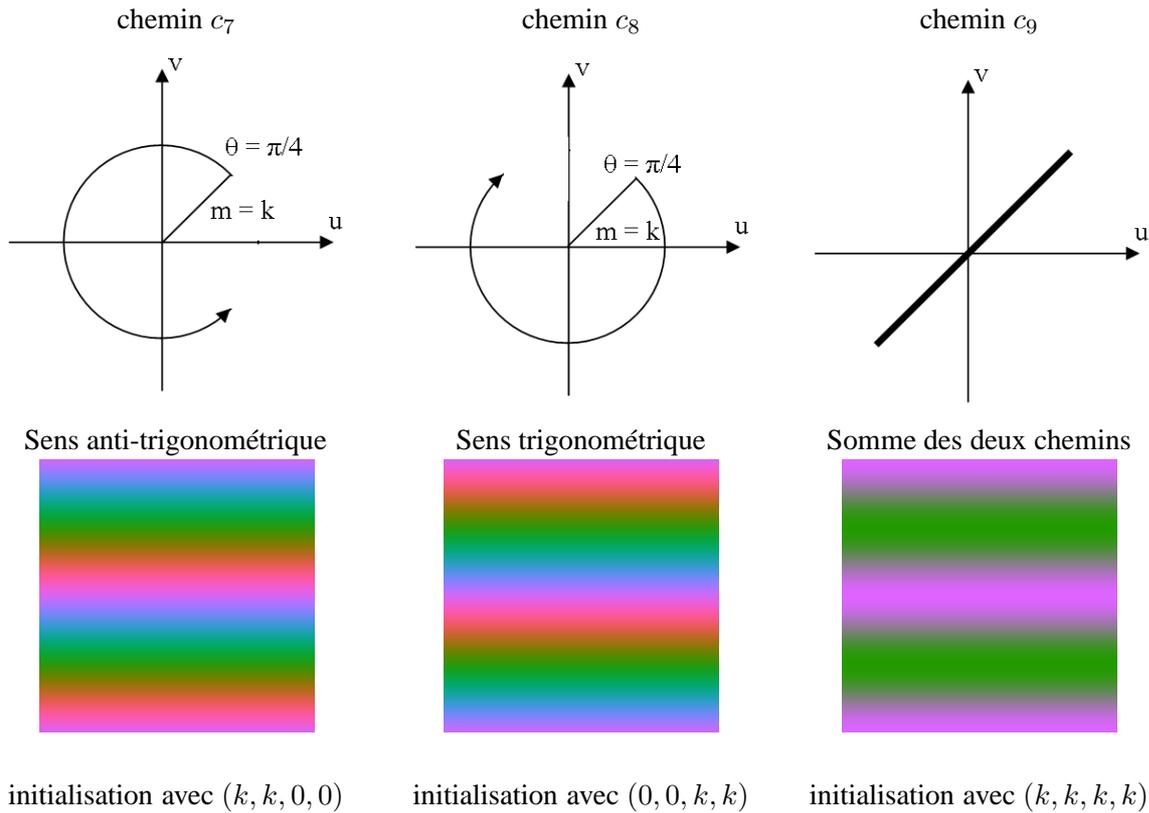


FIG. 2.22 – Le chemin couleur c_9 est obtenu à partir de la somme des chemins couleur c_7 et c_8 .

On remarque que même si la variation de couleur obtenue ne suit pas l'axe des réels ou celui des imaginaires, les changements de couleurs perçus se retrouvent entre le magenta et le vert, ce qui est complémentaire aux deux autres variations de couleurs étudiées précédemment.

Chemins couleur moins réguliers. Il est également possible de faire des combinaisons linéaires des chemins couleur de base que nous venons de citer, comme illustré à la figure 2.23. Par exemple, si on souhaite additionner les deux chemins représentés par les quadruplets $(0, 0, k_1, 0)$ et $(0, k_2, 0, 0)$. Le premier, c_{10} , à gauche dans le sens trigonométrique, possède un angle θ_1 nul et une amplitude $m_1 = k_1$. Le second, c_{11} , au milieu possède un angle et une amplitude différents car $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ et $m_2 = k_2$. Le résultat de cette somme est le chemin elliptique c_{12} illustré à droite. La forme de l'ellipse est définie par les amplitudes m_1 et m_2 et l'orientation de la couleur par les angles θ_1 et θ_2 . Le chemin c_{12} est différent de c_{10} même si cela n'est pas perceptuellement très visible sur la figure.

On peut aussi décrire le chemin couleur c_{12} par le calcul, il sera caractérisé par l'équation suivante :

$$u[m, n] + iv[m, n] = \frac{(k_1 + k_2) \cos\left(2\pi \frac{u_0 m + v_0 n}{N}\right) + i(k_2 - k_1) \sin\left(2\pi \frac{u_0 m + v_0 n}{N}\right)}{N}$$

Ici l'information entre la partie sinus et la partie cosinus est mélangée, en effet la variation de couleur correspondant au chemin couleur ne sera pas facile à identifier. Cette variation sera le résultat d'une pondération de chemins couleur élémentaires en fonction de l'amplitude qui leur est attachée. La variation de couleur obtenue ajoutera les participations de chacun de ces chemins élémentaires couleur pondérés avec la synthèse additive.

Nous avons vu qu'il est possible de décrire l'information spectrale obtenue par la transformée de Fourier définie dans équation (2.18) au moyen de la notion de chemin couleur. Plusieurs chemins élémentaires sont définis en utilisant les différents quadruplets d'initialisation du spectre couleur par des constantes. Chaque chemin couleur correspond à un point d'initialisation des composantes U et V dans le spectre. Il apparaît donc possible d'analyser des images couleur au moyen de l'information spectrale

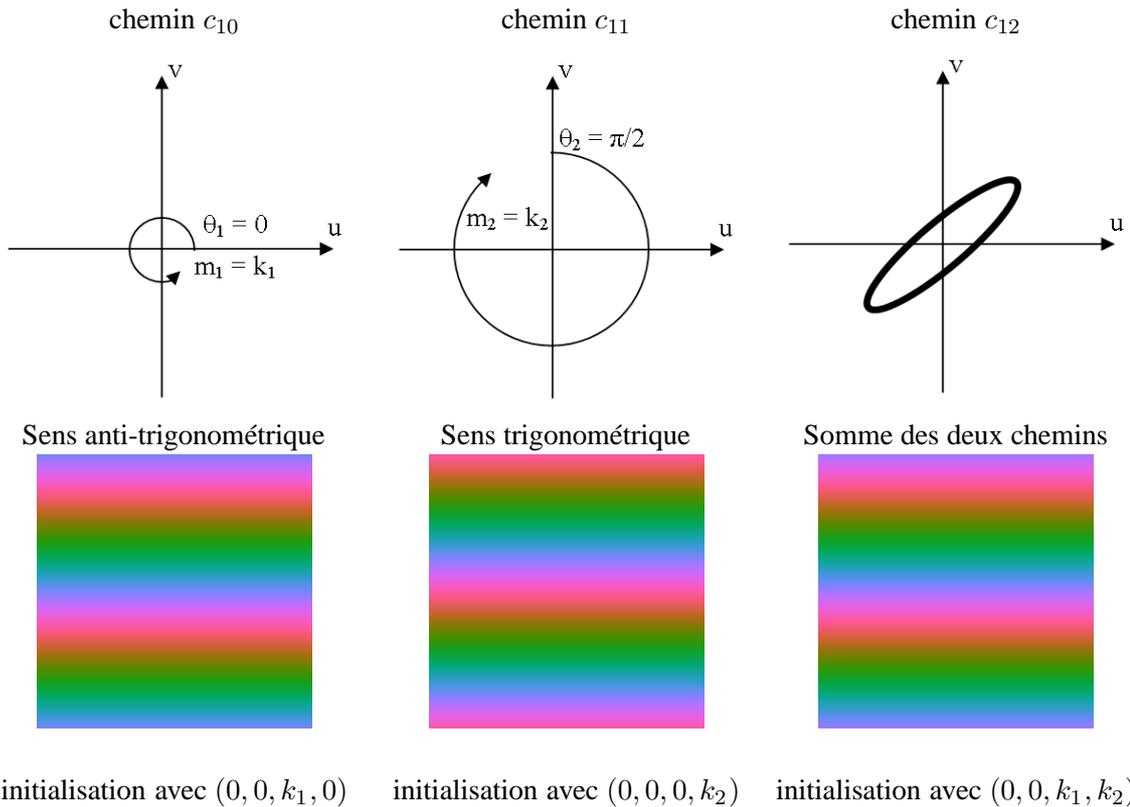


FIG. 2.23 – Le chemin couleur c_{12} est obtenu à partir de la somme des chemins couleur c_{10} et c_{11} . Ici même si les couples de coordonnées (o_0, p_0) et $(-o_0, -p_0)$ restent inchangés, les deux chemins c_{10} et c_{11} ont des amplitudes (m_1 et m_2) et des phases (θ_1 et θ_2) différentes.

obtenue à partir de cette lecture de transformée de Fourier. Cependant les variations passent par de nombreuses couleurs en parcourant chaque chemin, il peut alors paraître difficile d'isoler une couleur plutôt qu'une autre avec l'analyse obtenue. Pour réussir, il faudra décomposer le spectre afin d'obtenir tous les chemins couleurs élémentaires utilisés pour obtenir telle ou telle variation. Les chemins c_3 et c_6 permettent par contre de mettre en évidence les oppositions de couleur entre bleu - jaune et rouge - vert respectivement. Nous sommes plus habitués à analyser des couleurs avec ce type d'opposition car d'une part le système visuel humain est plus sensible aux notions de contraste qu'aux couleurs elles-mêmes et d'autre part, ce codage antagoniste est celui réalisé pour la transmission des informations de la rétine au cortex visuel, via le nerf optique. L'analyse couleur en utilisant cette transformée de Fourier sera donc basée sur des oppositions de couleurs caractéristiques des chemins élémentaires adaptés au système visuel humain car basé sur les contrastes de couleur (oppositions). Cependant cette représentation reste difficile à utiliser dans la pratique.

2.4.1.2 Variation spatiale

L'initialisation d'une ou plusieurs constantes dans le domaine spectral agit également sur la fréquence du signal 2D obtenue après transformée de Fourier inverse. Plus le point initialisé dans le spectre se trouvera éloigné du point central correspondant à la fréquence nulle, plus le signal 2D obtenu contiendra de périodes complètes décrites dans la même image.

Ainsi, par exemple, lorsque que l'on souhaite obtenir un signal horizontal contenant une période complète, il suffit d'initialiser le point de coordonnées fréquentielles $(1, 0)$. Pour avoir deux périodes, ce sera le point de coordonnées $(2, 0)$ (un autre point d'initialisation est possible : $(-2, 0)$ la différence n'étant que dans le chemin couleur parcouru et non sur le nombre de périodes du signal obtenu). La

figure 2.24 illustre différents signaux obtenus en changeant uniquement les coordonnées d'initialisation fréquentielle pour faire varier la période du signal 2D obtenu après transformée de Fourier inverse.

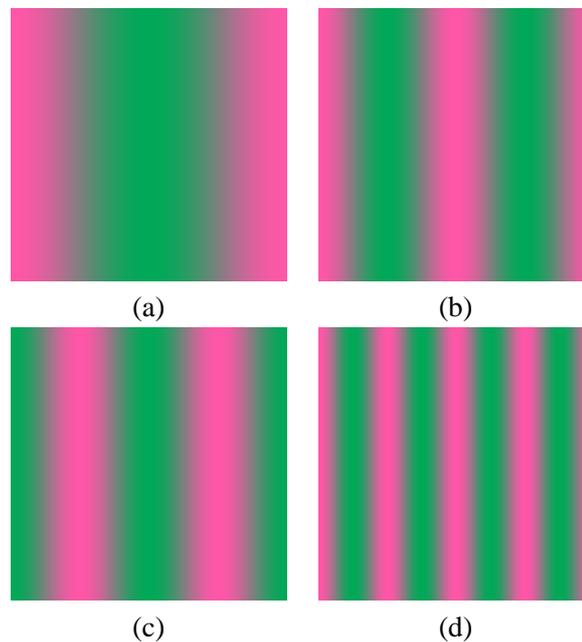


FIG. 2.24 – Variation du nombre d'oscillations horizontales des signaux 2D de couleur ; initialisations aux points de coordonnées (a) (1, 0), (b) (2, 0), (c) (-2, 0), (d) (4, 0).

Il est également possible d'influer sur l'orientation du signal 2D obtenu après transformée de Fourier inverse. En effet, comme le domaine fréquentiel permet de représenter les différentes fréquences de signaux 2D (en sinus et cosinus) qui apparaissent dans l'image, si on modifie les coordonnées de la ou les constantes d'initialisation, on modifie l'axe porteur du signal 2D résultant dans le domaine spatial. La figure 2.25 illustre ainsi différents signaux 2D obtenus en modifiant leur axe porteur dans le domaine spectral.

Les parties fréquentielles ont été initialisées aux points de coordonnées suivants :

- (a) (4, 4) et (-4, -4)
- (b) (-4, 4) et (4, -4)
- (c) (-2, 3) et (2, -3)
- (d) (0, 4) et (0, -4)
- (e) (2, 0) et (-2, 0)

On peut donc repérer des variations géométriques sur des images couleur en analysant leur spectre. En utilisant l'information fréquentielle associée au chemin couleur qui met en opposition le bleu et le jaune par exemple, on pourrait repérer les structures spatiales de l'image associée à ce type de chemin, autrement dit, les contours qui séparent une zone bleue d'une autre zone jaune au niveau du contour.

Toutefois, nous avons vu que les seules informations de chrominance de l'espace YUV ne suffisent pas à décrire convenablement les couleurs. Cependant, il est tout de même possible de mettre les couleurs en relation notamment par l'intermédiaire de chemins couleur qui les opposent ou les juxtaposent. Il existe une multitude de chemins couleur et il y en aura forcément un qui contiendra les deux couleurs. Ces deux couleurs seront alors soit en opposition dans le chemin soit proches l'une de l'autre. Nous avons voulu illustrer quel type d'information nous pouvons extraire de la transformée de Fourier chromatique. Pour cela nous proposons de visualiser le module du spectre UV obtenu à partir d'images naturelles ainsi que d'appliquer à des images couleur un filtrage fréquentiel basé sur cette transformée de Fourier chromatique.

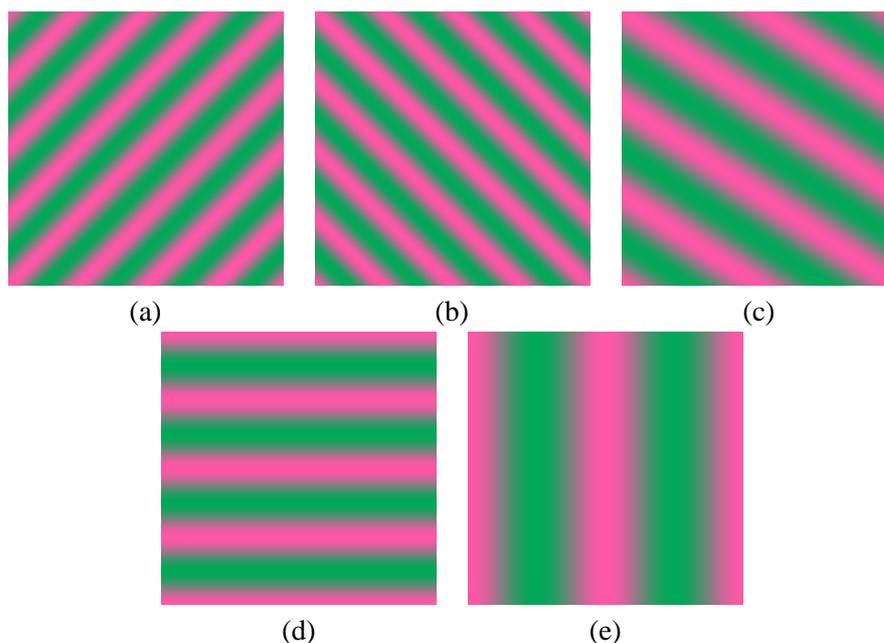


FIG. 2.25 – Variations géométriques des signaux 2D

2.4.2 Le module du spectre fréquentiel UV sur des images couleur

Pour obtenir une vue de ce module nous avons tout d'abord converti les images dans l'espace couleur YUV à partir de l'espace RGB dans lequel elles étaient encodées équation (2.7). Ensuite nous avons extrait les parties U et V que nous avons encodées dans une matrice de complexes. Nous avons effectué la transformée de Fourier et calculé le logarithme de son module. L'information est enregistrée dans une image en niveaux de gris (cf. figure 2.26). Les spectres obtenus semblent équivalents à ceux qui illustrent les spectres classiques d'images en niveaux de gris. En effet l'information du module correspond à la notion d'énergie du signal dans le domaine spectral. Cette information serait sensiblement équivalente pour une image en niveaux de gris étant donné qu'elle permet par exemple de représenter les composantes fréquentielles qui composent les objets de l'image. Nous pouvons donc en conclure que même si l'information UV n'est pas suffisante pour décrire la couleur, l'énergie du signal obtenue par la transformée de Fourier complexe chromatique correspond à celle obtenue par une analyse fréquentielle classique. En effet pour l'image comportant des blocs de couleur par exemple, la notion de texture apparaît par des motifs géométriques dans le spectre lui correspondant. L'énergie n'est pas une notion qui dépend uniquement des composantes chromatiques mais la transformée de Fourier chromatique utilisée ici la conserve correctement.

2.5 Filtrage fréquentiel UV

Une application à l'étude de cet espace fréquentiel numérique couleur défini à partir des composantes U et V de l'espace YUV après transformée de Fourier est la définition de filtres fréquentiels. En effet, il est possible de définir de tels filtres qui une fois appliqués sur des images couleur devraient permettre de mettre en évidence certaines fréquences dans des images et plus particulièrement certaines ruptures couleur. Le principe de tels filtres a été expliqué à la section 2.2.2.6. Pour créer un filtre passe-haut sur une image par exemple, on retire les informations de basse-fréquences contenues dans son spectre. Pour cela nous avons choisi simplement de définir un seuil de fréquences au-delà duquel les informations fréquentielles seraient conservées. Dans la figure 2.27, un tel filtre qui conserve 20% de l'information haute fréquence est illustré avec deux images. Pour une meilleure lisibilité à l'impression, les résultats après filtrage ont été réhaussés. On remarque cependant que même s'il apparaît des artefacts (cf. figure 2.27b) liés au fait que la fenêtre de sélection spectrale n'est qu'une simple fonction porte, l'information

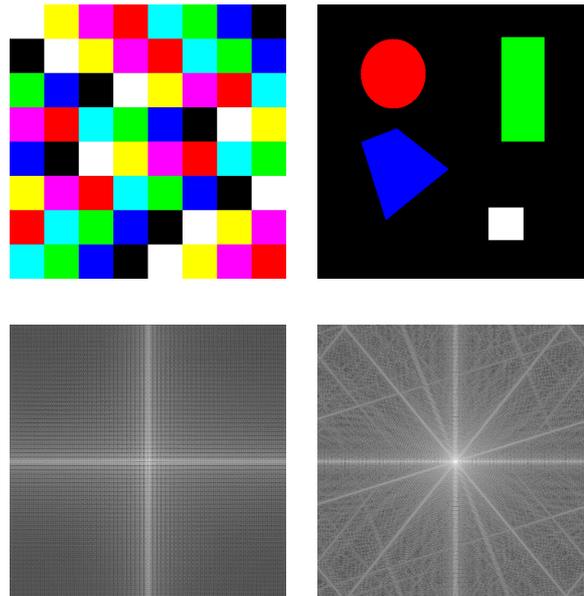


FIG. 2.26 – Images couleur (première ligne) et le module du spectre fréquentiel UV obtenue par la transformée de Fourier couleur (deuxième ligne)

haute fréquence est mise en évidence par ce type de filtrage. En effet, on peut reconnaître aisément les contours des objets de l'image. De plus, on remarquera que les contours obtenus par cette méthode de filtrage passe-haut, conservent les couleurs des objets d'origine. Ce constat permet de valider le fait qu'il n'est pas incohérent d'appliquer ce type de transformée de Fourier sur des images couleur. On remarque cependant que le résultat du filtrage fait apparaître les contours du cercle rouge avec l'opposition de couleur rouge/vert tout comme les contours du quadrilatère apparaissent avec l'opposition bleu/jaune (cf. figure 2.27c). Même si les couleurs sont exprimées uniquement suivant U et V et que la composante Y est manquante pour pouvoir caractériser complètement les couleurs, le résultat reste cohérent car il illustre le principe des chemins couleur qui mettent en opposition les couleurs antagonistes.

2.6 Conclusion

Au cours de ce premier chapitre, nous avons étudié comment le traitement des images couleurs était possible en utilisant le formalisme des complexes. Pour cela nous avons d'abord effectué un rappel sur l'analyse fréquentielle obtenue par la transformée de Fourier pour des signaux bidimensionnels tels que des images en niveaux de gris. Nous avons ensuite effectué une étude numérique de l'espace YUV afin de montrer comment les informations chromatiques contenues dans les composantes U et V se comportaient numériquement lors du changement d'espace couleur à partir des composantes RGB . Nous avons montré que l'information chromatique décrite par les composantes U et V est dépendante de la composante de clarté Y dans cet espace. Cependant nous avons tout de même pu observer qu'il n'était pas incohérent de définir une transformée de Fourier chromatique utilisant les deux composantes U et V pour décrire les variations fréquentielles de couleur. Pour interpréter l'information spectrale chromatique, nous avons utilisé la notion de chemin couleur. Ces chemins couleur définis dans le domaine de Fourier permettent de décrire des variations de couleur dans le domaine spatial. En effet, à chaque chemin couleur initialisé par un couple de fréquences correspond une variation de couleur dans le domaine spatial. Il est possible de décrire plusieurs types de variations de couleur au moyen de différents chemins élémentaires. Pour montrer que cette transformée de Fourier pouvait être utilisée avec les images, nous l'avons utilisée dans un schéma de filtrage fréquentiel permettant d'obtenir des images filtrées cohérentes. Nous confirmons cependant que l'information couleur qui comporte intrinsèquement trois dimensions ne peut être

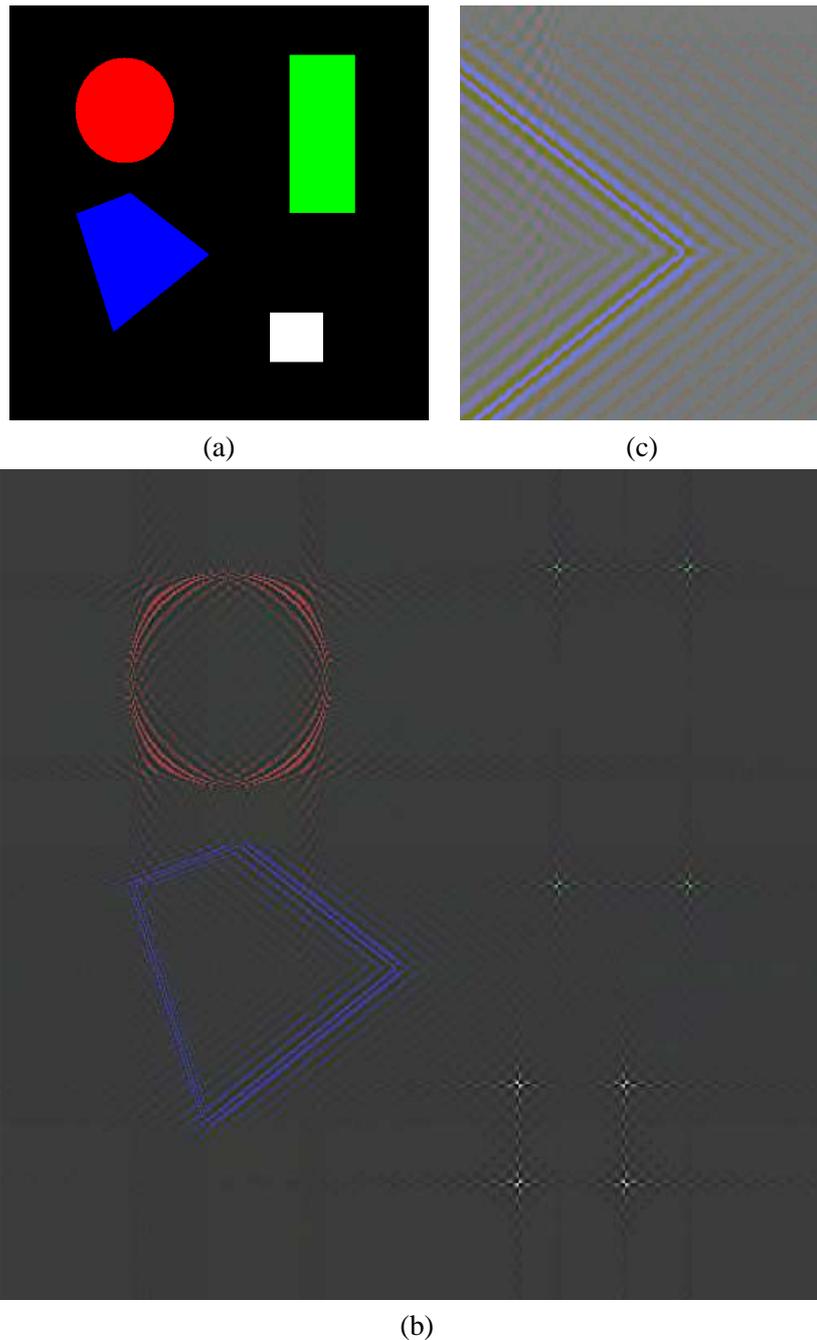


FIG. 2.27 – Filtrage Passe-Haut sur le spectre UV : image d'origine (a) ; image filtrée et rehaussée (b) ; zoom sur l'image filtrée (c)

réduite aux deux seules composantes offertes par l'utilisation des complexes car la chrominance n'est pas suffisante pour décrire complètement une couleur. Dans le chapitre suivant, nous montrons comment, en rajoutant par le formalisme des quaternions de la place libre pour coder l'information couleur dans sa globalité, il est possible d'obtenir des résultats plus complets pour traiter et analyser les images couleur.

MODÉLISATION DES COULEURS PAR LES QUATERNIONS

Nous avons vu dans le premier chapitre de ce document qu'il était possible d'utiliser les nombres complexes afin d'effectuer des traitements sur des images numériques couleur. En effet, nous avons décrit comment les nombres complexes pourraient analyser la partie chromatique des couleurs. Cependant les nombres complexes ne peuvent pas prendre en compte la nature tri-dimensionnelle des couleurs. Dans ce chapitre, les quaternions, qui sont une extension des nombres complexes et qui possèdent une capacité de stockage de quatre composantes, vont être utilisés pour encoder des couleurs. Après une introduction présentant les quaternions ainsi que les différentes manières de les représenter, nous étudierons comment ils peuvent être utilisés pour effectuer des traitements sur des images couleur numériques dans le domaine spatial. Ensuite nous présenterons différentes transformées de Fourier définies dans la littérature et nous nous intéresserons à l'utilisation de deux d'entre elles en analyse d'image. Enfin nous évaluerons la possibilité d'utiliser les quaternions pour effectuer une analyse fréquentielle des images numériques couleur.

3.1 Définition des quaternions et propriétés

3.1.1 Historique

Les quaternions ont été inventés par Sir William Rowan Hamilton en 1843. Il raconte lui-même qu'il a eu l'inspiration le 16 octobre 1843 alors qu'il se promenait le long du Royal Canal à Dublin. Tout excité par cette découverte, en traversant le Brougham Bridge, il aurait inscrit sur une des pierres du pont la formule de multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

3.1.2 Définition

L'ensemble des quaternions est défini avec $q = a + bi + cj + dk$ où :

- a, b, c et d sont des nombres réels ;
- i, j et k sont des nombres imaginaires, qui vérifient :

$$\begin{aligned}
 i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\
 ij &= -ji = k \\
 jk &= -kj = i \\
 ki &= -ik = j
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

La multiplication de deux quaternions est définie par associativité à partir des formules précédentes. Ceci munit l'ensemble des quaternions, noté \mathbb{H} , d'une structure de corps (cf. sous-section 3.1.4 pour la définition de l'inverse) non commutatif (par exemple, $ij = -ji$). Cette absence de commutativité fait apparaître certaines propriétés « singulières ». Ainsi, l'équation $x^2 + 1 = 0$ admet plus de deux racines dans \mathbb{H} : $i, -i, j, -j, k, -k$ sont par exemple six racines mais il en existe en fait une infinité.

3.1.3 Notations

Soit un quaternion quelconque q , on pourra également le voir décrit sous la notation suivante :

$$q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k \quad (3.2)$$

Avec q_r la partie réelle de q et q_i, q_j et q_k ses parties imaginaires.

3.1.4 Vocabulaire

Soit $q = a + ib + jc + kd$ un quaternion quelconque :

- $\bar{q} = a - ib - jc - kd$ est appelé le conjugué de q ;
- si q est non nul, alors $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ est l'inverse de q ;
- $\Re(q) = a$ est la partie réelle de q . Si $\Re(q) = q$, alors q est dit réel ;
- $\Im(q) = ib + jc + kd$ est la partie imaginaire de q . Si $\Im(q) = q$, alors q est dit pur ;
- le module ou la norme du quaternion q est défini comme suit : $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{q\bar{q}}$ et est noté $|q|$;
- $\mathbb{P} = \{q \in \mathbb{H} \mid q = \Im(q)\}$ est l'ensemble des quaternions purs ;
- $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ est l'ensemble des quaternions unitaires. De plus, \mathbb{S} forme un groupe.

3.1.5 Représentation cartésienne

Le quaternion $q \in \mathbb{H}$ est représenté sous sa forme cartésienne dans l'équation suivante (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$) :

$$q = a + ib + jc + kd \quad (3.3)$$

3.1.6 Représentation vectorielle

On considère avec cette représentation qu'un quaternion q est composé d'une partie scalaire $\mathcal{S}(q) = \Re(q)$ et d'une partie vectorielle $\mathcal{V}(q) = \Im(q)$.

$$q = \mathcal{S}(q) + \mathcal{V}(q) \quad (3.4)$$

Il est possible de représenter à partir de cette notation les vecteurs de \mathbb{R}^3 avec des quaternions purs. Dans le repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le vecteur $v = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ de coordonnées (x, y, z) sera donc représenté par le quaternion pur $\mathcal{V}(q) = q = xi + yj + zk$.

3.1.7 Produit quaternionique

Avec l'aide des représentations cartésienne et vectorielle nous pouvons désormais présenter le produit de deux quaternions quelconques. Soient q_1 et $q_2 \in \mathbb{H}$ tels que

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1 = \mathcal{S}(q_1) + \mathcal{V}(q_1) \\ q_2 &= a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2 = \mathcal{S}(q_2) + \mathcal{V}(q_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Le produit $q_1 q_2$ s'exprime alors en représentation cartésienne :

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2 \\
&+ (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) i \\
&+ (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) j \\
&+ (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) k
\end{aligned} \tag{3.6}$$

On peut aussi exprimer $q_1 q_2$ avec la représentation vectorielle :

$$\begin{aligned}
q_1 q_2 &= \mathcal{S}(q_1) \mathcal{S}(q_2) - \mathcal{V}(q_1) \cdot \mathcal{V}(q_2) \\
&+ \mathcal{S}(q_1) \mathcal{V}(q_2) + \mathcal{S}(q_2) \mathcal{V}(q_1) \\
&+ \mathcal{V}(q_1) \wedge \mathcal{V}(q_2)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

On remarque que le produit quaternionique fait apparaître $\mathcal{V}(q_1) \cdot \mathcal{V}(q_2)$ le produit scalaire et $\mathcal{V}(q_1) \wedge \mathcal{V}(q_2)$ le produit vectoriel des vecteurs V_1 et $V_2 \in \mathbb{R}^3$ représentant les parties imaginaires des quaternions q_1 et q_2 .

3.1.8 Représentation exponentielle

Les quaternions unitaires peuvent être représentés suivant une forme exponentielle. Cette représentation est l'extension de la forme exponentielle complexe obtenue avec les formules d'Euler[8].

Si $q = q_0 + i q_1 + j q_2 + k q_3 \in \mathbb{H}$ alors $\exists \varphi \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{P}$ tels que

$$q = |q| e^{\nu \varphi} = |q| (\cos \varphi + \nu \sin \varphi) \tag{3.8}$$

où ν est unitaire pur et est l'axe de q , et φ son angle. Ces deux quantités sont données par les relations :

$$\begin{cases} \nu = \frac{\mathcal{V}(q)}{|\mathcal{V}(q)|} = \frac{i q_1 + j q_2 + k q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}} \\ \varphi = \arctan \left(\frac{|\mathcal{V}(q)|}{\mathcal{S}(q)} \right) = \arctan \left(\frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{q_0} \right) \end{cases} \tag{3.9}$$

3.1.9 Représentation polaire

3.1.9.1 Définition

Dans son manuscrit de thèse, Bülow montre le calcul qui permet d'exprimer les quaternions sous forme polaire. Cette représentation comporte le module $|q|$ et les trois phases ϕ, θ et ψ . Tout quaternion peut ainsi être représenté de la manière suivante [8] :

$$q = |q| e^{i\phi} e^{k\psi} e^{j\theta} \text{ avec } (\phi, \theta, \psi) \in [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \tag{3.10}$$

Nous avons donc dans cette notation la notion d'amplitude d'un quaternion qui vaut $\rho(q)$ et la notion de phase angulaire $\arg(q)$ qui est représentée par un triplet :

$$\begin{cases} \rho(q) = |q| \\ \arg(q) = (\phi, \theta, \psi) \in [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \end{cases} \tag{3.11}$$

3.1.9.2 Méthode de calcul

Soit $q = a+ib+ jc+ kd$ un quaternion unitaire ; Alors le triplet $(\phi, \theta, \psi) \in [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, tel que $q = e^{i\phi} e^{k\psi} e^{j\theta}$, peut être déterminé par le calcul suivant :

1. calculer $\alpha = 2(bc - ad)$;
2. si $|a| = 1$ alors
 - a** $\hat{\phi} = 0$;
 - b** $\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(ac-bd)}{a^2-b^2-c^2+d^2}$;
 - c** $\psi = -\alpha \frac{\pi}{4}$;
 - sinon
 - a** $\hat{\phi} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(ab+cd)}{a^2-b^2+c^2-d^2}$;
 - b** $\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(ac+bd)}{a^2+b^2-c^2-d^2}$;
 - c** $\psi = \frac{1}{2} \arcsin \alpha$;
3. si $e^{i\phi} e^{k\psi} e^{j\theta} = -q$ alors
 - a** si $\hat{\phi} \geq 0$ alors $\phi = \hat{\phi} - \pi$;
 - b** si $\hat{\phi} < 0$ alors $\phi = \hat{\phi} + \pi$;
 - sinon $\hat{\phi} = \phi$.

3.1.10 Représentation de Cayley-Dickson

Pour tout $q = a + ib + jc + kd \in \mathbb{H}$ on peut écrire q sous sa forme de Cayley-Dickson [26] :

$$q = z_1 + z_2 j \quad (3.12)$$

avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$.

3.1.11 Représentation symplectique

Cette représentation est la généralisation de la notation de Cayley-Dickson, en effet tout quaternion étant exprimé dans la base d'origine $(1, i, j, k)$ peut être exprimé dans une autre base orthonormée $(1, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ avec des quaternions purs μ_1, μ_2, μ_3 tels que $\mu_1^2 = \mu_2^2 = \mu_3^2 = -1$, $|\mu_1| = |\mu_2| = |\mu_3| = 1$ et $\mu_1 \mu_2 = \mu_3 = -\mu_2 \mu_1$. Avec ces quaternions μ_1 et μ_2 tels $\mu_1 \perp \mu_2$ on peut donc représenter un quaternion q sous une forme complexe généralisée appelée représentation symplectique[27] :

$$q = q_1 + q_2 \mu_2 \quad (3.13)$$

avec q_1, q_2 tels que $q_1 = a' + b' \mu_1$ et $q_2 = c' + d' \mu_1$ donc :

$$q = (a' + b' \mu_1) + (c' + d' \mu_1) \mu_2 \quad (3.14)$$

On appelle souvent q_1 la partie simplexe et q_2 la partie perplexe.

La décomposition symplectique sépare l'information contenue dans un quaternion en deux plans perpendiculaires qui s'intersectent à l'origine de l'espace en 4 dimensions. Chacun de ces plans peut être vu comme un plan d'Argand¹[1]. Le premier est le plan d'Argand de la partie simplexe et son axe des réels est identique à la partie scalaire du quaternion tandis que son axe des imaginaires correspond à μ_1 . La partie perplexe est représentée par un autre plan d'Argand perpendiculaire au premier. L'axe des réels sur ce plan correspond à μ_2 tandis que la partie imaginaire est liée à μ_3 .

¹Le plan ou diagramme d'Argand également appelé d'Argand-Gauss, d'Argand-Cauchy correspond simplement au plan complexe. En termes actuels, un point M du plan d'Argand de coordonnées (a, b) est l'image de $z = a + ib$ dans le plan affine euclidien du repère orthonormal direct $(O, 1, i)$ avec $i^2 = -1$.

3.1.12 Transformations géométriques

Les quaternions peuvent être utilisés pour décrire des vecteurs de \mathbb{R}^3 , en utilisant uniquement leur partie vectorielle (ou de manière équivalente leur partie imaginaire). Il apparaît que des transformations géométriques simples sur des vecteurs de \mathbb{R}^3 peuvent être exprimées en utilisant que des additions et des multiplications de quaternions [66]. Ces transformations sont illustrées dans la figure 3.1.

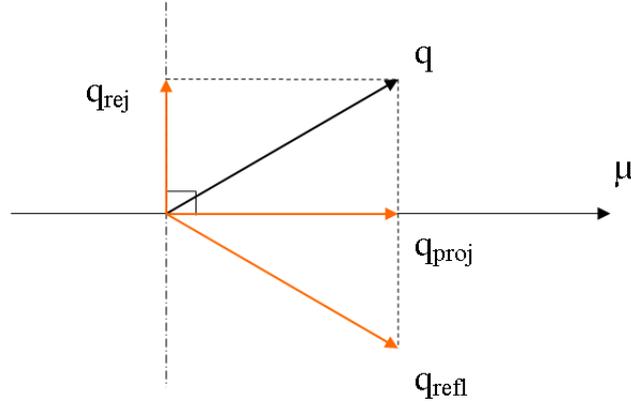


FIG. 3.1 – Les différentes transformations géométriques : q est un quaternion pur représentant un vecteur couleur ; μ représente un autre vecteur couleur ; $q_{refl} = -\mu q \mu$ est la réflexion de q par rapport à μ ; $q_{rej} = \frac{1}{2}(q + \mu q \mu)$ est la réjection de q par rapport à μ ; $q_{proj} = \frac{1}{2}(q - \mu q \mu)$ est la projection de q par rapport à μ .

En posant $q \in \mathbb{P}$, $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ et $\phi \in \mathbb{R}$:

Réflexion $q_{refl} = -\mu q \mu$ est la réflexion de q par rapport à μ ;

Projection $q_{proj} = \frac{1}{2}(q - \mu q \mu)$ est la projection de q par rapport à μ ;

Réjection $q_{rej} = \frac{1}{2}(q + \mu q \mu)$ est la réjection de q par rapport à μ ;

Rotation $q_{rot} = e^{\mu \frac{\phi}{2}} q e^{-\mu \frac{\phi}{2}}$ est la rotation de q autour de l'axe μ et d'angle ϕ .

3.1.13 Représentation parallèle/perpendiculaire

Soient $p, q \in \mathbb{P}$ alors on définit q_{\parallel} et q_{\perp} [27] par :

$$\begin{cases} q_{\parallel} = \frac{1}{2}(q + pqp) \\ q_{\perp} = \frac{1}{2}(q - pqp) \end{cases} \quad (3.15)$$

On peut écrire $q = q_{\parallel} + q_{\perp}$ pour tout quaternion q pur avec q_{\parallel} la partie de q parallèle au quaternion pur p et q_{\perp} la partie de q perpendiculaire à p . q_{\parallel} est simplement la projection du vecteur représentant q par rapport à p tandis que q_{\perp} en est la réjection.

Comme nous allons le voir, toutes ces propriétés peuvent être utilisées pour manipuler les images.

3.2 Approche spatiale quaternionique pour les images couleur

3.2.1 Quaternions et images couleur

Les premiers travaux proposant de coder les images couleur en utilisant des quaternions pour permettre d'éviter notamment des traitements marginaux sur les couleurs ont été proposés simultanément

par S.J. Sangwine [60] et S.C. Pei [54]. Ils ont proposé d'utiliser la représentation cartésienne des quaternions pour coder les pixels couleur des images. Ainsi une image couleur de dimension $M \times N$ sera représentée par une matrice de quaternions de dimension $M \times N$. Une couleur ne contenant que trois composantes dans l'espace RVB, il a été proposé de décrire l'information couleur sur la partie imaginaire des quaternions. Le pixel d'une image f aux coordonnées (m, n) sera donc codé de la manière suivante :

$$f[m, n] = f_r[m, n]i + f_v[m, n]j + f_b[m, n]k \quad (3.16)$$

avec $f_r[m, n]$, $f_v[m, n]$ et $f_b[m, n]$ respectivement les composantes rouge, verte et bleue du pixel de coordonnées (m, n) .

Nous allons dans cette section nous intéresser aux traitements spatiaux possibles avec le formalisme des quaternions. Tout d'abord on montrera comment une image couleur peut être décomposée en partie simplexe et partie perplexe, cette décomposition permettant d'expliquer l'analyse fréquentielle des images couleur de Sangwine et Ell[29]. Ensuite nous verrons qu'il est possible d'utiliser des transformations géométriques définies par des quaternions avec des couleurs de l'espace RVB pour exprimer ces couleurs sous forme de teinte, saturation et luminosité. Enfin nous illustrerons comment de telles opérations géométriques effectuées sur des couleurs représentées par des quaternions peuvent être utilisées dans une approche de détection de contours.

3.2.2 Séparation partie simplexe et partie perplexe

La décomposition symplectique (cf. section 3.1.11) a été utilisée sur les pixels couleurs des images codées avec des quaternions [27, 29] afin de séparer l'information de couleur en une partie de luminosité et une partie de chromaticité. Deux quaternions purs sont utilisés pour cette décomposition : le premier μ_1 est l'axe des niveaux de gris ($\mu_1 = \mu_{gris} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$); le second est l'axe perpendiculaire à μ_1 dans la direction de la couleur rouge ($\mu_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(i, -\frac{j}{2}, -\frac{k}{2})$) (car le rouge sera souvent utilisé comme référence pour une teinte de valeur nulle dans le plan de chromaticité).

Lorsque l'on décompose une image couleur en parties parallèle et perpendiculaire à μ_1 , il apparaît que cette décomposition permet de séparer l'information de luminosité sur la partie parallèle et l'information chromatique sur la partie perpendiculaire à μ_1 comme nous le montrent les résultats de la figure 3.2. En effet la partie parallèle à μ_1 (un réel codé sur la partie imaginaire de la partie simplexe) correspond à la projection de tous les pixels couleur sur l'axe des niveaux de gris : c'est une information d'intensité lumineuse. La partie perpendiculaire (nécessitant deux réels, respectivement associés à μ_2 et $\mu_1\mu_2$, pour coder les coefficients de la partie perplexe) correspond quant à elle à la projection des pixels de l'image sur le plan perpendiculaire à μ_1 et qui passe par le vecteur μ_2 (on passe par un changement de base pour revenir dans la base i, j, k qui correspond à l'espace rgb). Cette seconde partie est donc considérée comme de l'information chromatique. Si on somme les deux parties simplexe f_1 et perplexe f_2 , on obtient de nouveau l'image originale f . Cette décomposition symplétique est utilisée comme nous le verrons plus tard dans l'analyse des images couleur par Ell et Sangwine dans [29], pour séparer l'information spectrale obtenue après transformée de Fourier en parties chromatique et achromatique.

3.2.3 Transformations couleur

Pour chaque couleur décrite par un quaternion dans l'espace couleur RVB on peut faire correspondre son équivalent dans un espace couleur de teinte, saturation et intensité. Nous considérons que cette dernière information est représentée par la norme de la projection du vecteur couleur q sur l'axe des niveaux de gris $\mu_{gris} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$. La saturation et la teinte peuvent être représentées sur le plan orthogonal à μ_{gris} à l'intersection de cet axe et de l'extrémité du vecteur projeté de q sur μ_{gris} . La saturation est la distance entre l'extrémité du vecteur couleur q et l'axe μ_{gris} . La teinte correspond à l'angle entre la réjection du vecteur q par rapport à μ_{gris} et un vecteur ν (vecteur de référence pour une teinte d'angle nul) pris sur le plan orthogonal à μ_{gris} . La teinte de référence, c'est à dire celle d'angle nul, est souvent

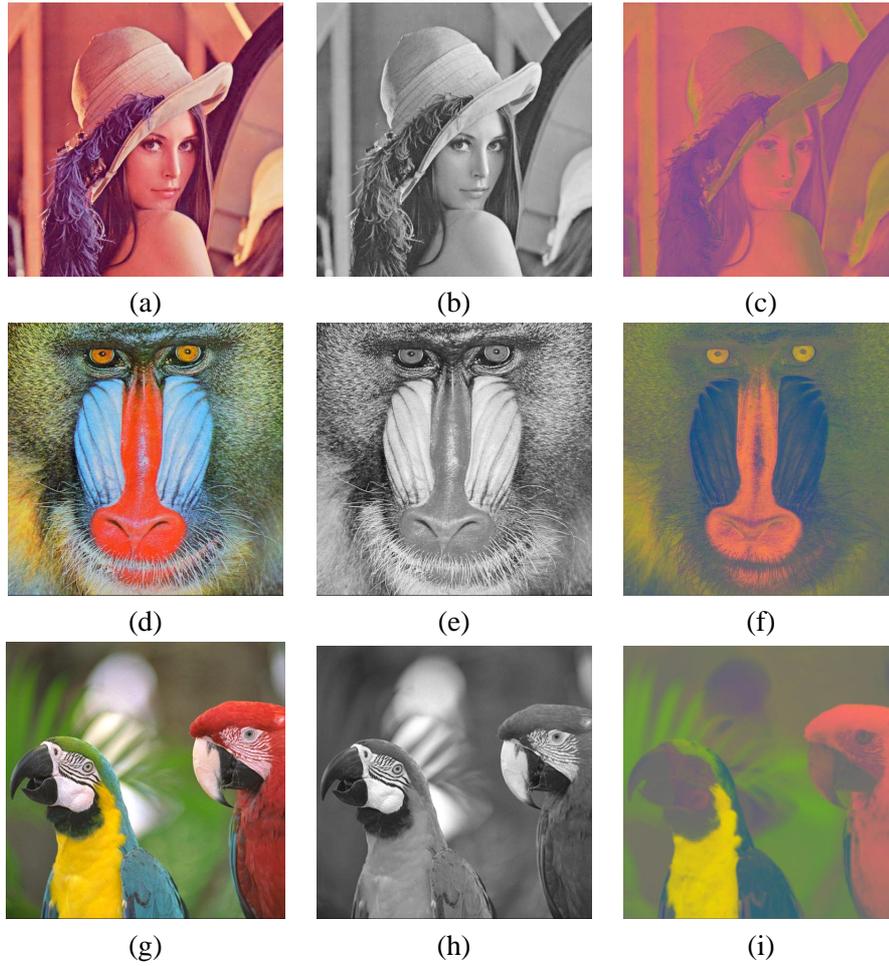


FIG. 3.2 – Décomposition symplectique sur des images couleur : première colonne images originales ; seconde colonne : parties parallèles ; dernière colonne : parties perpendiculaires

prise rouge, donc le vecteur ν est la réjection du vecteur couleur correspondant au rouge par rapport à l'axe des niveaux de gris. Ces différentes valeurs sont illustrées dans la figure 3.3.

Pour un vecteur couleur q , les valeurs correspondantes de teinte (T), clarté (L pour Luminance en anglais) et saturation (S) ont été définies antérieurement dans l'équipe [35], elles peuvent être obtenues avec le vecteur $\mu = \mu_{gris} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ et le vecteur de référence $\nu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ en utilisant les opérations quaternioniques suivantes qui seront utilisées plus tard pour définir un gradient quaternionique couleur :

$$\begin{cases} T = \tan^{-1} \frac{|q - \mu \nu q \mu|}{|q - \nu q \nu|} \\ L = \frac{1}{2} |q - \mu q \mu| \\ S = \frac{1}{2} |q + \mu q \mu| \end{cases} \quad (3.17)$$

avec $|\frac{1}{2}(q - \mu q \mu)|$ la norme de la projection de q par rapport à μ et $|\frac{1}{2}(q + \mu q \mu)|$ la norme de la réjection de q par rapport à μ (cf. équation 3.15).

3.2.4 Détection de contours

Dans cette partie nous nous focalisons sur l'aspect filtrage spatial couleur et plus particulièrement l'étude de la détection des discontinuités ou contours qui est une problématique fondamentale du traitement des images en général, mais plus particulièrement en couleur car elle n'est pas encore résolue dans ce cadre. Nous commencerons d'abord par revoir les méthodes traditionnellement utilisées pour la détection des contours. Puis nous aborderons différentes solutions proposées utilisant le formalisme des

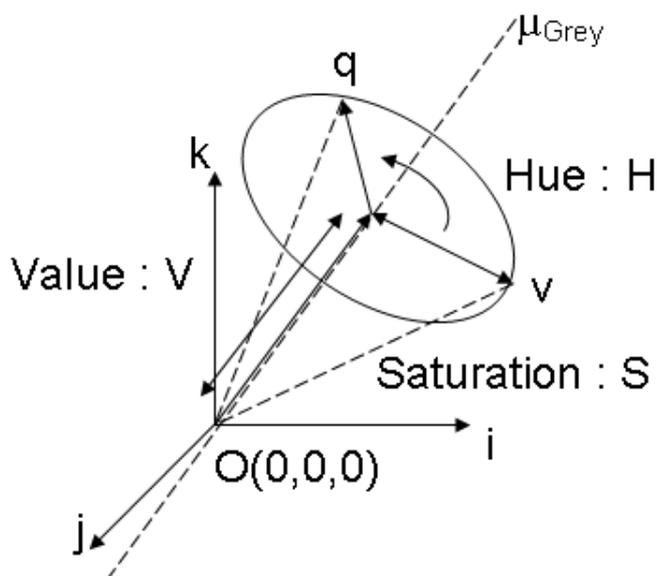


FIG. 3.3 – Teinte (Hue), Saturation et Clarté (Value) obtenues avec μ_{gris} et $T(\nu) = 0$

quaternions et enfin nous présenterons une nouvelle méthode calculant un gradient couleur à partir des quaternions.

3.2.4.1 Méthodes marginales

Les méthodes marginales reposent sur l'extension des traitements sur les images en niveaux de gris en effectuant séparément sur chaque canal couleur un traitement (cf. figure 3.4a). Elles bénéficient donc d'une implémentation relativement simple car il suffit d'adapter les traitements déjà existants sur chacune des matrices de pixels correspondant aux composantes couleur. Cependant, comme elles ne prennent pas l'information couleur dans sa globalité car elles ne prennent pas en compte les corrélations (interactions) entre les composantes, les résultats font souvent apparaître des incohérences en terme de perception (fausses couleurs).

3.2.4.2 Méthodes vectorielles

Pour éviter les inconvénients des méthodes marginales, les méthodes vectorielles considèrent les pixels des images comme des vecteurs couleur (cf. figure 3.4b). Les traitements sont alors effectués de manière globale sur la couleur. Le problème de ce type de méthodes repose à la fois sur le choix de l'espace de codage, pour faire correspondre l'information couleur à une information vectorielle et surtout sur la modélisation et l'exploitation mathématiques des données. Par exemple Di Zenzo [21] définit un gradient vectoriel couleur basé sur la géométrie différentielle des surfaces en utilisant un tenseur multi-spectral. Celui-ci, associé à un champ vectoriel, permet de rechercher les variations locales de l'image, autrement dit les contours. La plus grande valeur propre du tenseur correspond alors à la norme de ce gradient vectoriel qui détecte les contours couleur. Comparées aux méthodes marginales, les méthodes vectorielles obtiennent de meilleurs résultats perceptuels mais au prix d'une plus grande complexité.

3.2.4.3 Méthodes perceptuelles

Les méthodes perceptuelles [32, 39, 72, 57] sont basées sur des caractéristiques du système visuel humain (SVH). Par exemple, dans [11], Carron utilise une méthode reposant sur un gradient marginal

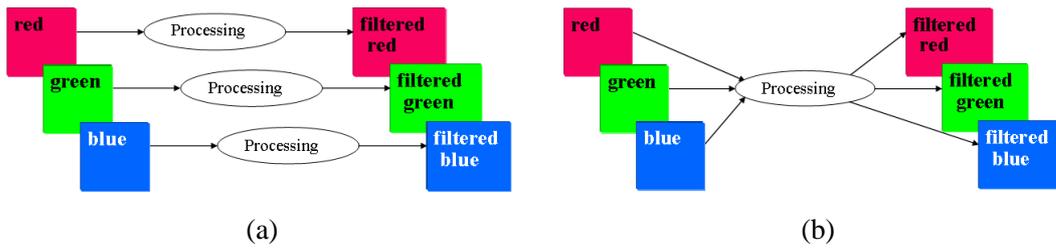


FIG. 3.4 – Les méthodes marginales (a) travaillent de manière indépendante sur chacune des composantes couleur tandis que les méthodes vectorielles (b) travaillent de manière globale sur les couleurs.

composé des informations de luminance, de saturation et de teinte. Deux méthodes sont proposées, la première considère qu'à faible niveau de saturation, la teinte n'est pas pertinente, elle n'est alors pas utilisée. Cependant lorsque la saturation est faible, le gradient proposé rajoute l'information de teinte. La deuxième méthode privilégie l'information de teinte, les informations de saturation et de luminance ne sont prises en compte que lorsque celle-ci n'est pas pertinente pour séparer les couleurs en terme de perception humaine. En effet, à teinte égale, deux couleurs auront l'air de présenter une plus grande différence lorsqu'elles sont fortement saturées que lorsqu'elles le sont moins. La figure 3.5 montre ce phénomène avec les deux vecteurs couleur q_1 et q_2 qui semblent moins éloignés entre eux que les vecteurs couleurs q_3 and q_4 même si cela n'est pas vrai en terme de teinte.

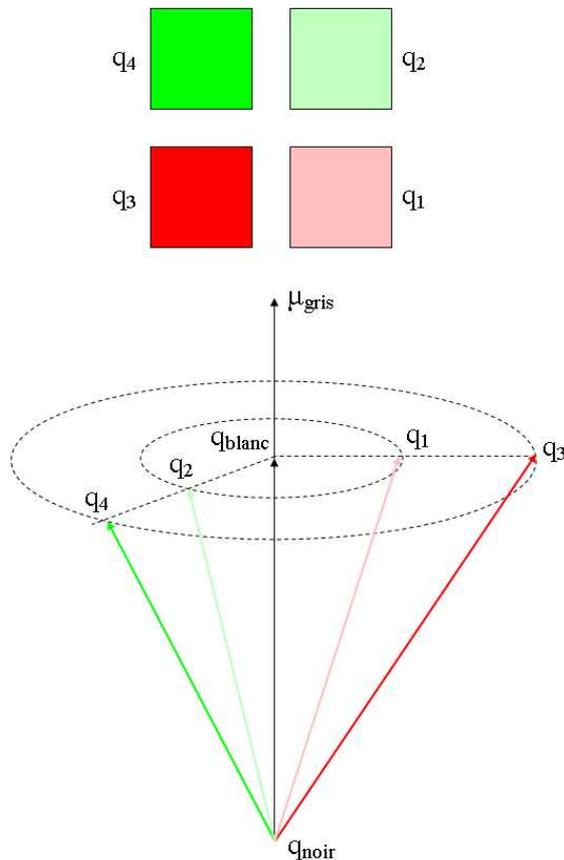


FIG. 3.5 – La distance couleur perçue entre les vecteurs q_1 et q_2 paraît moins importante qu'entre les vecteurs q_3 et q_4 même si la différence de teinte est la même : $\widehat{q_1 q_2} = \widehat{q_3 q_4}$. q_{noir} , q_{blanc} et μ_{gris} représentent dans l'ordre le vecteur couleur nul noir, blanc et l'axe des niveaux de gris.

Les méthodes perceptuelles donnent souvent de meilleurs résultats que les méthodes marginales et vectorielles car elles intègrent des caractéristiques du système visuel humain à partir de modélisation mathématiques simples. Cette prise en compte de la perception permet d'éviter l'apparition des artefacts de couleurs dans les images résultats. Un autre gros avantage de ces méthodes est la détection des zones ombragées à l'intérieur des modèles perceptifs, évitant par exemple la surdétection en tant que contours des ombres d'une scène. En effet la couleur d'une ombre sera composée de la même teinte que celle de l'objet sur lequel l'ombre apparaît mais sa clarté et sa saturation seront différentes. La complexité algorithmique de ces méthodes est accrue comparée aux méthodes marginales mais pas forcément par rapport à certaines méthodes vectorielles.

3.2.4.4 L'approche quaternionique de Sangwine

Les travaux de Sangwine et al. [63, 50] sur le filtrage spatial proposent de généraliser les filtres linéaires classiques à l'utilisation des quaternions pour les images couleur. Une fois un filtre linéaire quaternionique défini, il suffit de le convoluer avec l'image couleur pour obtenir l'image couleur filtrée.

Etant donné que le produit quaternionique n'est pas commutatif, il est possible de définir plusieurs produits de convolution, le produit de convolution à droite est défini ici pour un signal en deux dimensions :

$$(f * h)[m, n] = \sum_{\tau_1=0}^{M-1} \sum_{\tau_2=0}^{N-1} [(m - \tau_1|_M, |n - \tau_2|_N] h [| \tau_1|_M, | \tau_2|_N] \quad (3.18)$$

avec h le filtre de dimension $M \times N$ (M et N des entiers impairs) et la notation $|m|_N$ qui indique l'opérateur modulo N .

Sangwine a proposé un détecteur de contours basé sur la rotation des couleurs des pixels de l'image d'un angle π autour de l'axe des gris. Le vecteur couleur résultat de cette rotation est comparé aux vecteurs couleurs des pixels voisins (cf. figure 3.6).

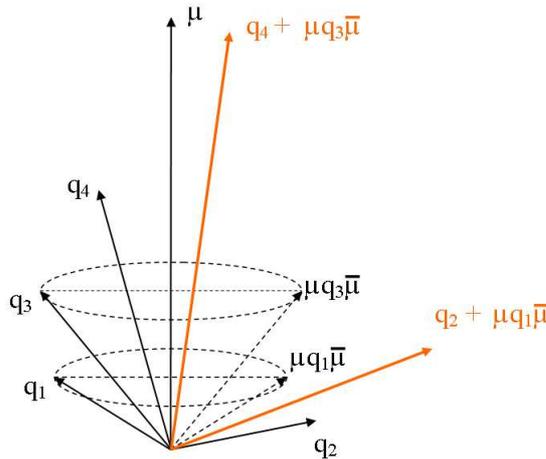


FIG. 3.6 – Schéma du détecteur de contours de Sangwine : μ est l'axe des gris ; $\mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $\mu q_3 \bar{\mu}$) est la rotation du vecteur q_1 (resp. q_3) autour de μ et d'angle π ; le vecteur de comparaison entre q_1 et q_2 (resp. entre q_3 et q_4) est donné par $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$) ; $q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$ est proche de l'axe des gris et $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ en est plus éloigné donc le détecteur de Sangwine peut détecter un contour avec ce vecteur qui est plus coloré que le précédent.

L'opération de filtrage proposée par Sangwine est la suivante :

$$f_{filtrée}[m, n] = (h_1 \star f \star h_2)[m, n] \quad (3.19)$$

où les filtres h_1 et h_2 sont une paire de filtres conjugués avec $Q = e^{\mu \frac{\pi}{2}}$ et $\mu = \mu_{gris} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ l'axe des gris tels que :

$$h_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ Q & Q & Q \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{Q} & \overline{Q} & \overline{Q} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

L'image résultat (cf. figure 3.6) ne donne à première vue pas l'impression d'être pertinente pour détecter les contours. En effet, il semble qu'elle soit constituée uniquement d'information en termes de niveaux de gris. Cependant ce n'est pas le cas, car si on y regarde de plus près, seules les zones de couleurs homogènes de l'image d'origine apparaissent en niveaux de gris. En effet, le résultat affiche le vecteur de comparaison qui est un quaternion pur représentant des couleurs *rvb*. Ce vecteur est le résultat de l'opération géométrique qui consiste à ajouter deux vecteurs couleur entre eux. Le premier terme de la somme est le pixel couleur à analyser. Le second terme est calculé par la rotation du vecteur correspondant à la moyenne des pixels voisins du pixel analysé d'un angle de π par rapport à l'axe des gris. Lorsque le pixel analysé est situé dans une zone homogène de l'image d'origine, comme c'est le cas des vecteurs q_3 et q_4 dans l'exemple, le vecteur résultat, $q_4 + \mu q_3 \overline{\mu}$ sur l'exemple, est un vecteur couleur très proche de l'axe des niveaux de gris, autrement dit, il a une faible saturation. Le résultat apparaîtra comme une couleur proche d'un niveau de gris. En revanche, si le pixel analysé se situe sur une zone de contour, autrement dit, ses pixels voisins sont en opposition de couleur (comme q_1 et q_2 sur l'exemple), le vecteur couleur de comparaison ($q_2 + \mu q_1 \overline{\mu}$) sera éloigné de l'axe des niveaux de gris. Autrement dit, ce vecteur aura une forte saturation et par conséquent les contours apparaîtront colorés du fait de cette plus grande distance.

Malgré ses bonnes performances, ce détecteur produit des fausses couleurs notamment lorsque le vecteur couleur de comparaison produit « déborde » du domaine de définition de l'espace couleur. Cela arrive lorsque deux pixels voisins ont une différence colorimétrique très importante. De plus nous pouvons voir sur la figure 3.7 que le chapeau de Lenna n'est pas détecté avec la même couleur dans les images résultats (c) ou (d) pourtant dans ces deux cas, le filtre est composé de filtres horizontaux. La différence est due au sens d'application des filtres h_1 et h_2 dans la convolution, en inversant l'ordre de leur application dans le schéma de convolution, les vecteurs couleurs de comparaison produits sont différents. Nous proposons donc par la suite une méthode évitant ces inconvénients.

3.2.4.5 Détection de contours par Maximum de distance couleur

Définition En reprenant le principe du détecteur de contours de Sangwine nous proposons de créer un gradient quaternionique [20]. Pour chaque pixel par exemple q_1 (resp. q_3) nous avons un vecteur de comparaison² avec son voisin q_2 (resp. q_4) obtenu par la méthode de Sangwine. Nous avons vu que plus la différence de couleur était grande entre pixels voisins et plus le vecteur de comparaison résultant était éloigné de l'axe des niveaux de gris. Nous proposons donc de calculer la distance q_{dist} entre ce vecteur de comparaison et l'axe des niveaux de gris μ ($q_{sum} = q_2 + \mu q_1 \overline{\mu}$ ou $q_{sum} = q_4 + \mu q_3 \overline{\mu}$). La figure 3.8 résume notre approche. Cette distance peut être calculée au moyen d'opérations quaternioniques élémentaires (cf. section 3.2.3) car cette distance est la norme de la réjection du vecteur de comparaison par rapport à μ . L'équation (3.17) nous indique qu'il s'agit de la saturation du vecteur de comparaison. Cette distance est donc calculée par la norme du vecteur q_{dist} avec :

$$q_{dist} = \frac{1}{2} (q_{sum} + \mu q_{sum} \mu) \quad (3.21)$$

²On peut aussi dire que ce vecteur de comparaison est la somme de la réflexion de q_1 par rapport à l'axe des gris avec q_2 ou encore la somme du symétrique de q_1 par rapport à μ avec q_2 .

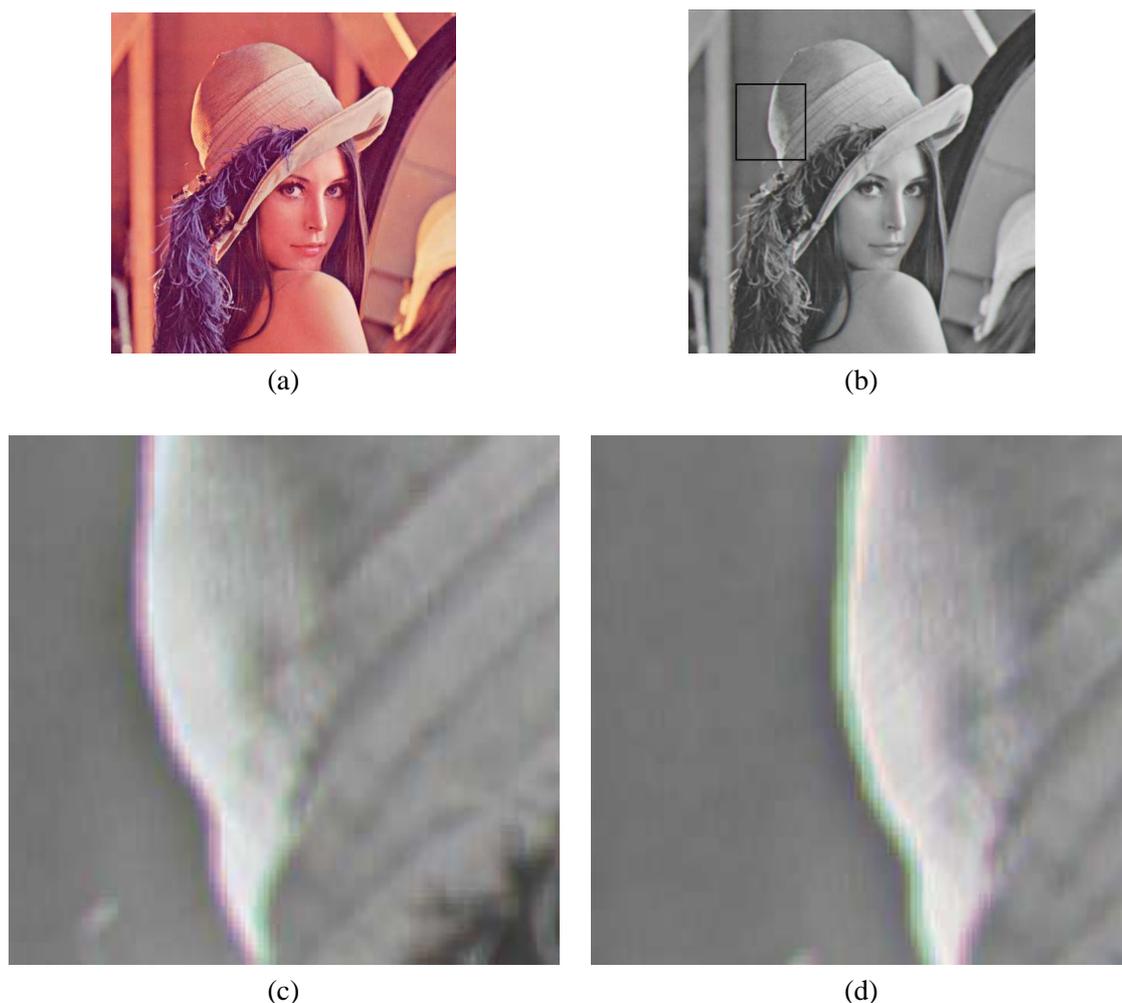


FIG. 3.7 – Résultat du détecteur de contours de Sangwine : (a) image originale ; (b) image traitée par un filtrage de Sangwine horizontal ; (c) zoom sur les contours du chapeau dans (b) ; (d) le même zoom que dans (c) mais sur l'image traitée par un filtrage dans lequel h_1 et h_2 ont été permutés. Les zones homogène apparaissent en niveaux de gris tandis que les contours détectés sont mis en évidence par des pixels colorés.

De ce fait, lorsque la méthode de filtrage de Sangwine nous donne deux vecteurs de comparaison différents $q_1 + \mu q_2 \bar{\mu}$ et $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ pour comparer les couleurs portées par les vecteurs q_1 et q_2 , la figure 3.9 montre que les deux distances S_1 et S_2 calculées avec notre approche sont bien sûr identiques. Cette nouvelle approche est indépendante du sens d'application de la paire de filtres conjugués utilisés dans la convolution.

Cette opération de filtrage est appliquée en utilisant des filtres horizontaux, verticaux et dans les deux directions diagonales. On sélectionne ensuite la distance maximale de saturation obtenue pour chacune de ces directions pour obtenir le gradient couleur final. Nous remarquons que ces opérations sont linéaires mais que le résultat final ne l'est pas. Le gradient final étant obtenu par l'utilisation d'une norme, on perd la linéarité en utilisant la norme L_∞ liée à l'opérateur « maximum » également assez sensible au bruit. Au contraire lorsque l'on utilise la norme L_2 l'approche est complètement linéaire³. La figure 3.10 montre les deux gradients obtenus avec les normes L_2 et L_∞ . On remarque quelques petites différences et le choix de la norme s'effectuera donc en fonction des besoins de l'application.

³du fait de la linéarité de la norme euclidienne

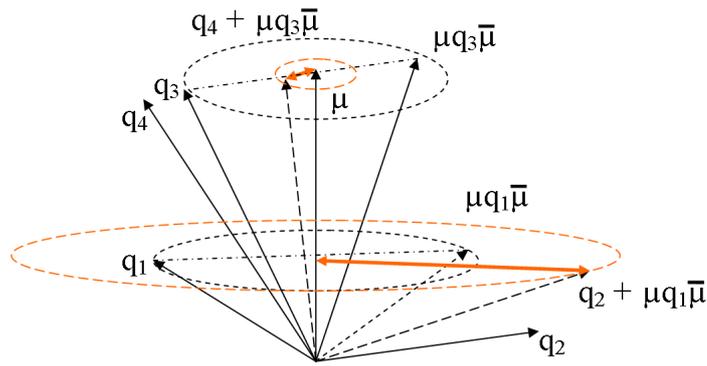


FIG. 3.8 – Le schéma de l’approche proposée : μ est l’axe des niveaux de gris ; $\mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $\mu q_3 \bar{\mu}$) est le vecteur résultant de la rotation de q_1 (resp. q_3) par rapport à μ d’un angle de π . Nous comparons les vecteurs q_1 et q_2 (resp. q_3 et q_4) par la distance $q_{dist} = \frac{1}{2}(q_{sum} + \mu q_{sum} \mu)$ entre le vecteur de comparaison de Sangwine $q_{sum} = q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $q_{sum} = q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$) et l’axe μ (flèches oranges). Un contour pourra être détecté par une grande distance de l’axe des gris comme par exemple la flèche orange entre μ et $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$.

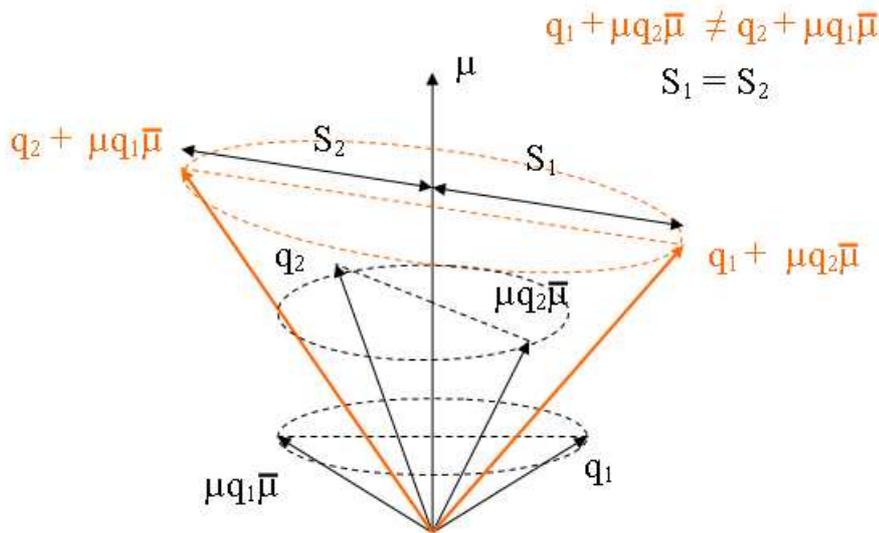


FIG. 3.9 – Différence entre le détecteur de contours de Sangwine et le notre : μ est l’axe des gris ; $\mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $\mu q_2 \bar{\mu}$) est le symétrique de q_1 (resp. q_2) par rapport à μ ;

La figure 3.11 montre les résultats de notre approche avec pour chaque ligne l’image originale suivie du gradient couleur, ensuite le logarithme du gradient couleur (pour amplifier les contours détectés par le gradient) et enfin une carte de contours obtenue par seuillage empirique du gradient. Nous observons que la méthode permet de détecter correctement les contours couleur avec par exemple l’image de la maison où les murs, le toit et le ciel sont bien séparés. On remarque aussi dans la carte des contours obtenue avec l’image de Lenna que son épaule est convenablement séparée du menton. Pour l’image du babouin, les régions texturées sont aussi dissociées des régions homogènes. Cependant, comme notre méthode n’est basée que sur une mesure de saturation, les différences de luminosité ne sont pas détectées comme nous le remarquons avec les détails de la fenêtre de la maison par exemple.

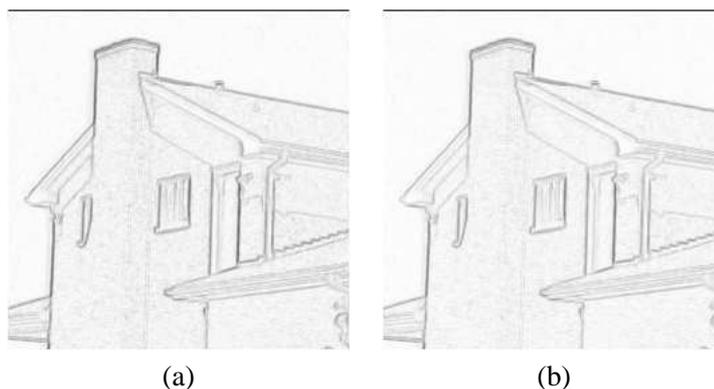


FIG. 3.10 – Différence des gradients de saturation obtenus avec la norme L_2 pour (a) et L_∞ pour (b) à partir de l'image de la maison. Les images ont été inversées pour une meilleure lisibilité.

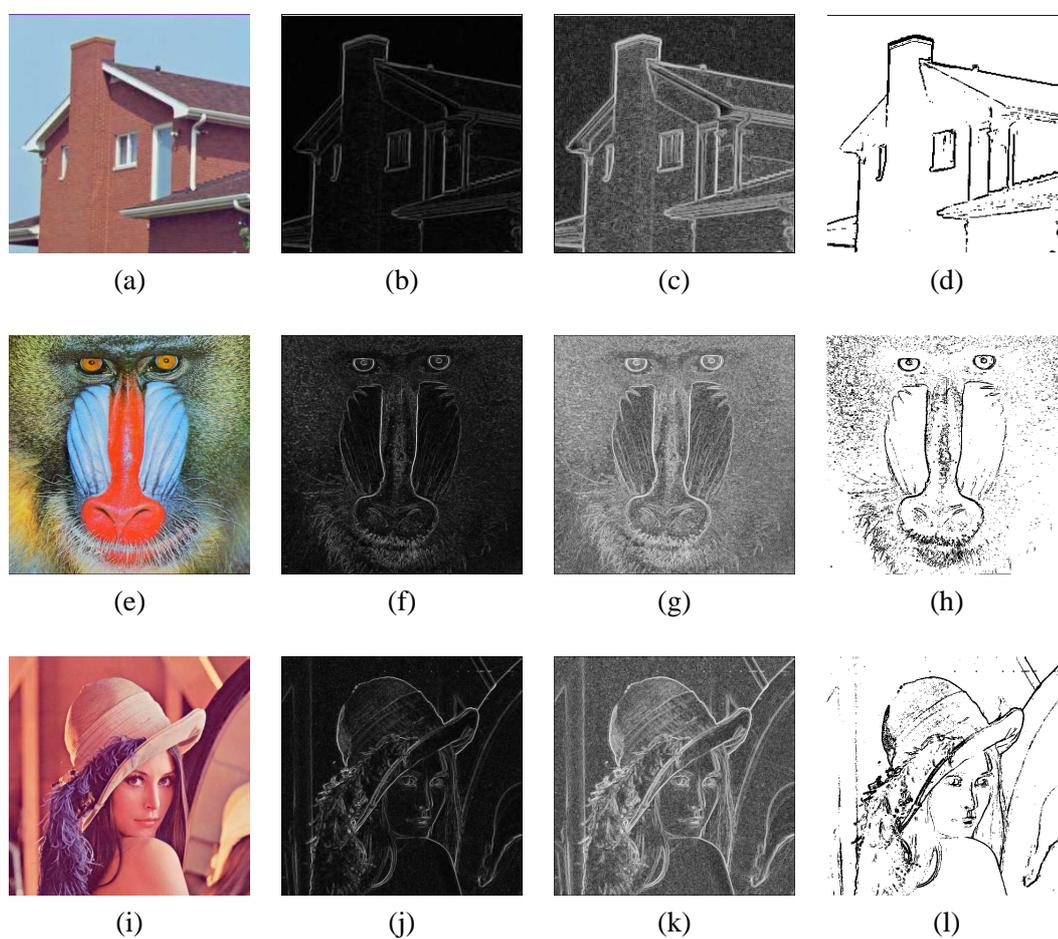


FIG. 3.11 – De gauche à droite : images originales, gradient couleur, logarithme du gradient couleur et carte des contours

Comparaison La figure 3.12 montre des cartes de contours obtenues par différentes méthodes sur l'image de la maison. Les méthodes marginales (figure 3.12b) et de Di Zenzo (figure 3.12c) semblent plus sensibles au bruit. Les contours obtenus par notre approche (figure 3.12f and g) sont plus épais et fermés. On rappelle que la première approche de Carron (figure 3.12d) est basée sur une différence de teinte pour pondérer un gradient marginal tandis que sa seconde méthode utilise aussi la luminosité et la saturation lorsque la teinte n'est pas suffisante. Ces deux approches permettent d'obtenir des contours fermés et non sensibles au bruit contrairement aux méthodes marginales et de Di Zenzo. Comparés à

la seconde approche de Carron (figure 3.12e), nos résultats ne permettent pas de tenir compte aussi efficacement des ombres car nous n'avons inclus qu'une mesure de saturation. Nos résultats dépendent de plus de la valeur manuelle donnée au seuillage du gradient. En effet nous pouvons faire disparaître les contours des ombres mais ceci au prix de contours plus fins partout ailleurs (cf. figure 3.11d par exemple).

Pour améliorer nos résultats, nous devons vérifier si la mesure de saturation est suffisante et dans le cas contraire ajouter de l'information pour détecter les contours. En effet, deux couleurs peuvent être différentes en ayant la même saturation comme nous l'avons vu par exemple avec les couleurs q_1 et q_2 d'un côté et des couleurs q_3 et q_4 de l'autre dans la figure 3.5. Heureusement, ces couleurs peuvent être différenciées par leur teinte ou leur clarté. Rajouter une information de clarté lorsque la saturation n'est pas suffisante peut améliorer nos résultats, ce qui sera présenté dans la section traitant des images couleurs associées aux algèbres géométriques.

Cependant, même sans ces améliorations, notre détecteur de contours est performant. L'implantation utilisant les couleurs RVB avec le formalisme des quaternions permet de ne pas avoir d'artefacts comme ceux obtenus en changeant d'espace couleur du fait des imprécisions numériques obtenues par ces différents changements d'espaces. On notera aussi que notre méthode est une méthode vectorielle car nous encodons les couleurs sur la partie vectorielle des quaternions. De plus, elle ne nécessite pas une quelconque définition pour ordonner les vecteurs couleur entre eux. Notre distance est une mesure de saturation qui ne donne donc pas plus d'importance à une couleur qu'à une autre lorsqu'elles ont la même saturation. Enfin notre méthode est plus proche d'une approche perceptuelle que celles basées sur l'espace couleur RVB car elle utilise la géométrie de cet espace couleur cartésien grâce aux quaternions pour se rapprocher des méthodes utilisant les espaces couleur en teinte, clarté et saturation.

Nous allons maintenant introduire l'analyse dans le domaine complémentaire à savoir Fourier.

3.3 Transformées de Fourier quaternioniques

Les transformées de Fourier quaternioniques (ou aussi TFQ) ont été introduites par Todd A. Ell en 1992 alors qu'il cherchait à généraliser la transformée de Fourier complexe pour les images couleur. On entend aussi parler de QFT de l'anglais Quaternionic Fourier Transform. Comme pour la version complexe, les transformées de Fourier quaternioniques permettent de passer d'une information spatiale à son équivalent en terme de fréquence ou inversement. Il existe plusieurs versions de transformées de Fourier notamment parce que le produit quaternionique n'est pas commutatif. Ces différentes versions ne sont pas tout à fait identiques cependant elles sont étroitement liées. Alors que Bülow utilisa une TFQ pour analyser les structures 2D des images en niveaux de gris, Sangwine fut l'un des premiers à associer les images couleur aux transformées de Fourier quaternioniques. Du fait de l'utilisation de celles-ci pour les images numériques, nous nous contenterons d'analyser les versions discrètes des transformées.

3.3.1 TFQ utilisant j et k dans les exponentielles

Cette version est celle définie par Todd Ell [26] dans sa thèse et utilisée par Sangwine en 1996 dans [60]. Ici l'emploi des quaternions imaginaires j et k est uniquement réservé à la définition d'une TF de nature quaternionique. Aucune information spectrale n'est dans ce cas donnée à ces deux composantes. Soit f une fonction discrète à deux variables m et n à valeurs quaternioniques, une transformée de Fourier quaternionique (ou TFQ) est une fonction à valeurs quaternioniques pouvant s'écrire de la manière suivante :

$$F_{jk}[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2j\pi \frac{om}{M}} f[m, n] e^{-2k\pi \frac{pn}{N}} \quad (3.22)$$

avec m et n (respectivement o et p) les coordonnées spatiales (resp. fréquentielles).

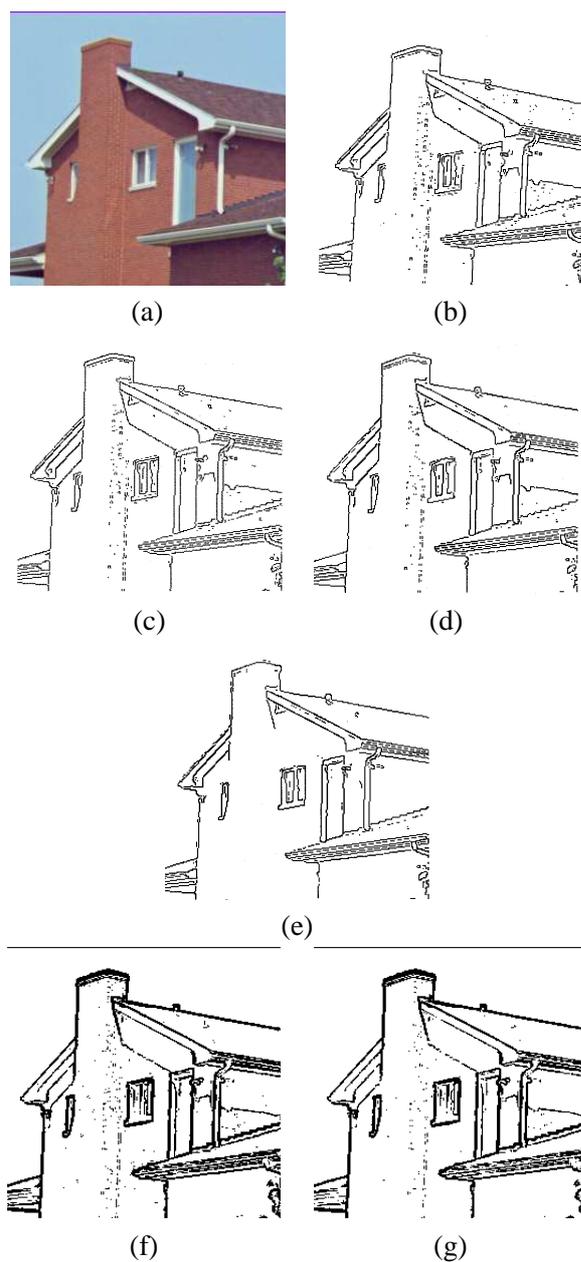


FIG. 3.12 – Comparaison de différentes méthodes de détection de contours avec l’image de la maison : (a) image originale ; (b) gradient marginal ; (c) approche de Di Zenzo ; (d) première approche de Carron ; (e) seconde approche de Carron ; (f) notre approche ; (g) notre approche avec le logarithme du gradient.

3.3.2 TFQ utilisant i et j dans les exponentielles

Cette version est une variante de la précédente qui a été définie par Thomas Bülow dans sa thèse [8] pour analyser les images en niveaux de gris. Dans ce cas, on verra par la suite que la dimension horizontale est associée à l’imaginaire pur i tandis que la dimension verticale de l’image est liée à l’imaginaire j .

$$F_{ij}[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{om}{M}} f[m, n] e^{-2j\pi \frac{pn}{N}} \quad (3.23)$$

3.3.3 Transformée de Fourier quaternionique directionnelle à droite

Par la suite, Sangwine a apporté des modifications aux transformées précédentes en ajoutant à l'expression de l'exponentielle une direction caractérisée par un quaternion unitaire pur μ [61]. Le plus souvent pour ne privilégier aucune couleur pour l'analyse spectrale on prend le quaternion neutre $\mu_{gris} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ qui correspond à l'axe achromatique de l'espace RVB. La définition est la suivante :

$$F_{droite}[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m, n] e^{-2\mu\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)} \quad (3.24)$$

3.3.4 Transformée de Fourier quaternionique à gauche

Il est possible de basculer l'expression de l'exponentielle à gauche de la fonction f , on obtient la définition d'une autre transformée de Fourier car le produit quaternionique n'est pas commutatif :

$$F_{gauche}[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\mu\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)} f[m, n] \quad (3.25)$$

3.3.5 Transformée de Fourier quaternionique directionnelle à deux côtés

Il est également possible de séparer l'exponentielle en deux parties, un peu à la manière des deux premières définitions données mais en conservant le fait de rajouter une direction exprimée par des quaternions unitaires purs (ici μ_1 et μ_2) à l'intérieur des exponentielles. Plusieurs combinaisons sont possibles comme par exemple :

$$F_{côtés_1}[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\mu_1\pi\frac{om}{M}} f[m, n] e^{-2\mu_2\pi\frac{pn}{N}} \quad (3.26)$$

ou bien :

$$F_{côtés_2}[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\mu_1\pi\frac{pn}{N}} f[m, n] e^{-2\mu_2\pi\frac{om}{M}} \quad (3.27)$$

Dans tous les cas, la différence entre ces transformées réside essentiellement dans le fait que le produit quaternionique n'est pas commutatif. La plupart du temps donc, un signe positif ou négatif au sein d'une expression entraînera un développement final différent.

3.3.6 Inversibilité

Dans tous les cas pour obtenir les transformées inverses il suffit de remplacer le signe négatif par un signe positif à l'intérieur des exponentielles du fait de la propriété $e^\mu e^{-\mu} = 1$.

3.4 Approche fréquentielle quaternionique pour les images en niveaux de gris

Avant d'étudier l'utilisation des quaternions pour l'analyse fréquentielle des images couleur, nous présentons la première approche qui associe les quaternions aux images numériques. Les quaternions furent en effet tout d'abord associés aux images numériques en niveaux de gris au moyen de la définition d'une transformée de Fourier quaternionique définie par Bülow [8] dont nous donnerons tout d'abord un rappel. Ensuite, nous verrons quelles symétries apparaissent dans le spectre associé à cette transformée de Fourier quaternionique. Enfin, nous verrons comment Bülow réussit à caractériser les structures 2D au sein des images en niveaux de gris par l'intermédiaire de la généralisation du signal analytique 1D aux signaux à deux dimensions.

3.4.1 Transformée de Fourier quaternionique pour les images en niveaux de gris

Soit f un signal quaternionique sur les deux dimensions réelles spatiales m et n alors la transformée de Fourier de f , notée F^q sur les dimensions fréquentielles o et p est donnée par :

$$F^q[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2i\pi \frac{om}{M}} f[m, n] e^{-2j\pi \frac{pn}{N}} \quad (3.28)$$

Cette TFQ peut être utilisée sur des signaux réels, complexes et quaternioniques car l'ensemble des quaternions \mathbb{H} contient l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} qui contient lui-même l'ensemble de nombres réels \mathbb{R} . Pour la suite des ces travaux, la TFQ sera utilisée sur des signaux à valeurs réelles qui correspondent à l'information d'intensité des pixels en niveaux de gris. Les facteurs dans les intégrales peuvent aussi être changés, mais uniquement dans la définition de la TFQ, car changer leur ordre modifierait le résultat du fait de la non-commutativité des quaternions. Par conséquent, une fois la TFQ définie, l'ordre des coefficients ne doit donc plus changer.

Bülow a défini cette transformée de Fourier en associant la direction horizontale m à la première exponentielle décrite avec le quaternion i et la direction verticale n à la deuxième exponentielle liée au quaternion j .

Nous allons maintenant étudier les propriétés de symétries qui sont associées au spectre obtenu par cette transformée.

3.4.2 Symétries

Le fait qu'un signal soit une fonction paire ou impaire joue un rôle important dans l'analyse de Fourier. On peut écrire n'importe quelle fonction comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire $f = f_p + f_i$ ⁴. Il est connu [5] que la transformée de Fourier d'un signal 1D pair est paire tandis que celle d'un signal 1D impair est impaire. De plus, la TF d'un signal réel (resp. imaginaire) pair est réelle (resp. imaginaire) alors que la TF d'un signal réel (resp. imaginaire) impair est imaginaire (resp. réelle). Le diagramme ci-dessous résume ces informations :

$$\begin{array}{ccccccc}
 f[m] = f_p[m] + f_i[m] & = & \mathcal{R}f_p[m] + \mathcal{I}f_p[m] & + & \mathcal{R}f_i[m] + \mathcal{I}f_i[m] \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 F[o] = F_p[o] + F_i[o] & = & \mathcal{R}F_p[o] + \mathcal{I}F_p[o] & + & \mathcal{R}F_i[o] + \mathcal{I}F_i[o]
 \end{array}$$

L'idée de Bülow est d'étendre ces notions de symétries au cas de signaux 2D. Ainsi pour étudier les propriétés de symétrie sur la TFQ de Bülow, les signaux 2D sont séparés en plusieurs signaux selon les parties paires et impaires le long des axes m et n . Tous les signaux 2D peuvent donc être écrits sous la forme $f = f_{pp} + f_{ip} + f_{pi} + f_{ii}$ avec f_{pp} correspondant à la partie de f qui est paire le long de m et n , f_{ip} correspondant à la partie qui est impaire le long de m et paire le long de n , etc.

La transformée de Fourier Quaternionique de Bülow peut être réécrite de la manière suivante (pour des signaux 2D f réels) :

⁴Dans toute cette section on notera f_i pour une propriété de symétrie impaire et non pas pour la première partie imaginaire du quaternion f .

$$\begin{aligned}
F^q[o, p] = & \frac{1}{\sqrt{MN}} \left(\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi \frac{om}{M}) \cos(2\pi \frac{pn}{N}) f[m, n] \right. \\
& - i \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi \frac{om}{M}) \cos(2\pi \frac{pn}{N}) f[m, n] \\
& - j \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi \frac{om}{M}) \sin(2\pi \frac{pn}{N}) f[m, n] \\
& \left. + k \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(2\pi \frac{om}{M}) \sin(2\pi \frac{pn}{N}) f[m, n] \right) \quad (3.29)
\end{aligned}$$

A partir de cette équation, Bülow a pu déduire les propriétés de symétrie de sa transformée de Fourier quaternionique qui sont illustrées ici :

$$\begin{array}{c}
f[m, n] = \mathcal{R}f_{pp}[m, n] + \mathcal{R}f_{ip}[m, n] + \mathcal{R}f_{pi}[m, n] + \mathcal{R}f_{ii}[m, n] \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
F^q[o, p] = \mathcal{R}F_{pp}^q[o, p] + \mathcal{I}F_{ip}^q[o, p] + \mathcal{J}F_{pi}^q[o, p] + \mathcal{K}F_{ii}^q[o, p] \\
\\
f[m, n] = \mathcal{I}f_{pp}[m, n] + \mathcal{I}f_{ip}[m, n] + \mathcal{I}f_{pi}[m, n] + \mathcal{I}f_{ii}[m, n] \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
F^q[o, p] = \mathcal{I}F_{pp}^q[o, p] + \mathcal{R}F_{ip}^q[o, p] + \mathcal{K}F_{pi}^q[o, p] + \mathcal{J}F_{ii}^q[o, p] \\
f[m, n] = \mathcal{J}f_{pp}[m, n] + \mathcal{J}f_{ip}[m, n] + \mathcal{J}f_{pi}[m, n] + \mathcal{J}f_{ii}[m, n] \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
F^q[o, p] = \mathcal{J}F_{pp}^q[o, p] + \mathcal{K}F_{ip}^q[o, p] + \mathcal{R}F_{pi}^q[o, p] + \mathcal{I}F_{ii}^q[o, p] \\
f[m, n] = \mathcal{K}f_{pp}[m, n] + \mathcal{K}f_{ip}[m, n] + \mathcal{K}f_{pi}[m, n] + \mathcal{K}f_{ii}[m, n] \\
\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
F^q[o, p] = \mathcal{K}F_{pp}^q[o, p] + \mathcal{J}F_{ip}^q[o, p] + \mathcal{I}F_{pi}^q[o, p] + \mathcal{R}F_{ii}^q[o, p]
\end{array}$$

On remarque que pour un signal uniquement réel les variations paires suivant les axes m et n seront reportées sur la partie réelle du spectre quaternionique, les variations impaires suivant m et paires suivant n seront représentées dans la première partie imaginaire du spectre, les variations paires suivant m et impaires suivant n seront elles sur la seconde partie imaginaire du spectre et qu'enfin les variations impaires suivant m et n seront sur la dernière partie imaginaire du spectre. On aura donc une caractérisation de toutes les symétries spatiales possibles en 2D séparées dans le spectre quaternionique. De plus, même si cette information n'est pas nécessaire à l'analyse d'un signal réel, avec un signal décrit sur un quaternion quelconque, les mêmes propriétés de symétries séparent les parties paires et impaires suivant m et n dans le spectre pour chaque composante du quaternion (partie réelle, première partie imaginaire, deuxième partie imaginaire et troisième partie imaginaire) de manière indépendante.

3.4.3 Notion d'amplitude et de phase instantanées

Dans la partie suivante la notion de signal analytique qui permet de caractériser l'amplitude et la phase instantanée d'un signal 1D sera présentée brièvement. Ensuite, nous verrons comment Bülow réussit à étendre cette notion de signal analytique aux signaux à deux dimensions.

3.4.3.1 Le signal analytique 1D

Un signal 1D f variant dans le temps peut être représenté à l'instant t_0 par un vecteur oscillant sur l'axe réel entre 0 et $f(t)$. Cependant à l'instant t_0 le vecteur $f(t_0)$ ne donne aucune information sur l'amplitude ou la phase instantanée de l'oscillation. Autrement dit, on ne peut ni savoir si f augmente vers la droite ou au contraire revient dans l'autre sens, ni connaître l'amplitude de l'oscillation. Le signal analytique $f_A(t) = f(t) + if_{\mathcal{H}i}(t)$ défini par Gabor[34] et construit à partir de $f(t)$ et de sa transformée de Hilbert $f_{\mathcal{H}i}(t)$ (cf. équation 3.30) comble ces manques. En effet il permet de connaître à un instant t_0 l'amplitude et la phase du signal. La figure 3.13 présente cette notion de signal analytique en montrant le vecteur f_A à l'instant t_0 en fonction de f et $f_{\mathcal{H}i}$. L'amplitude instantanée à l'instant t_0 vaut $|f_A(t_0)|$ et la phase instantanée vaut $\text{atan2}(\mathcal{I}f_A(t_0) + \mathcal{R}f_A(t_0))$. Le vecteur $f_A(t_0)$ peut être vu comme un vecteur de rotation dans le plan complexe. On remarque aussi que la projection de $f_A(t_0)$ sur l'axe des réels donne le vecteur $f(t_0)$ et sur l'axe des imaginaires donne le vecteur $f_{\mathcal{H}i}(t_0)$. On remarque donc que la partie réelle du signal analytique f_A correspond au signal f lui même.

$$f_{\mathcal{H}i}(t) = f(t) * \left(\frac{1}{\pi t} \right) \quad (3.30)$$

avec $*$ le produit de convolution 1D.

On notera que la fonction $\frac{1}{\pi t}$ est égale à la transformée de Hilbert de la distribution de Dirac : $\delta_{\mathcal{H}i}(x) = \frac{1}{\pi t}$. Ainsi, la transformée de Hilbert d'une fonction f est égale au produit de convolution de celle-ci avec la transformée de Hilbert de la distribution de Dirac.

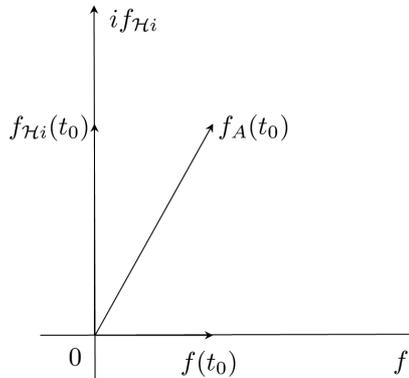


FIG. 3.13 – Capture du vecteur oscillant f et du vecteur f_A à l'instant t_0

A partir de l'expression donnée dans le domaine temporel ou spatial on exprime la transformée de Hilbert $F_{\mathcal{H}i}$ du signal 1D f (dont la TF est F) dans le domaine des fréquences par :

$$F_{\mathcal{H}i}(\omega) = -i \text{sign}(\omega) F(\omega) \quad \text{avec} \quad \text{sign}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega > 0 \\ 0 & \text{si } \omega = 0 \\ -1 & \text{si } \omega < 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

Le signal analytique 1D dans le domaine de Fourier s'exprime donc par :

$$\begin{aligned} F_A(\omega) &= F(\omega) + iF_{\mathcal{H}i}(\omega) \\ &= F(\omega)(1 + \text{sign}(\omega)) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Une propriété que l'on déduit de l'équation (3.32) est que le spectre d'un signal analytique ne possède pas de fréquences négatives.

A partir de cette expression du signal analytique pour des signaux 1D, Bülow généralise l'approche aux signaux 2D. Pour cela, il utilise les propriétés de symétries du spectre obtenu par sa transformée de Fourier ainsi que de la transformée de Hilbert étendue au cas 2D.

3.4.3.2 Le signal analytique quaternionique

Soit f un signal réel à deux dimensions et F^q sa transformée de Fourier quaternionique (cf. équation 3.28). Le signal analytique quaternionique, aussi appelé signal monogénique, est défini dans le domaine fréquentiel par [8] :

$$F_A^q(u, v) = (1 + \text{sign}(u))(1 + \text{sign}(v))F^q(u, v) \quad (3.33)$$

Bülow définit la transformée de Hilbert totale quaternionique par :

$$f_{\mathcal{H}_T}(x, y) = f(x, y) * \left(\frac{1}{\pi^2 xy} \right) \quad (3.34)$$

Son équivalent dans le domaine des fréquences vaut :

$$F_{\mathcal{H}_T}(u, v) = -F(u, v)\text{sign}(u)\text{sign}(v) \quad (3.35)$$

Il définit de plus les transformées de Hilbert partielles dans les directions x et y dans le domaine spatial par :

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{H}_1}(x, y) &= f(x, y) * \left(\frac{\delta(y)}{\pi x} \right) \\ f_{\mathcal{H}_2}(x, y) &= f(x, y) * \left(\frac{\delta(x)}{\pi y} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec $\delta(x)$ et $\delta(y)$ les distributions de Dirac dans les directions x et y .

Ce qui correspond dans le domaine fréquentiel à :

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{H}_1}(u, v) &= -iF(u, v)\text{sign}(u) \\ F_{\mathcal{H}_2}(u, v) &= -iF(u, v)\text{sign}(v) \end{aligned} \quad (3.37)$$

L'expression du signal analytique quaternionique $f_A^q(x, y)$ dans le domaine spatial est ainsi définie par :

$$f_A^q(x, y) = f(x, y) + f_{\mathcal{H}_1}(x, y)i + f_{\mathcal{H}_2}(x, y)j + f_{\mathcal{H}_T}(x, y)k \quad (3.38)$$

Bülow définit ainsi l'amplitude et la phase instantanées du signal 2D à partir du signal analytique quaternionique (cf. équation (3.11) pour $\arg(q)$) :

$$\begin{cases} |f_A^q(x, y)| = \sqrt{f^2(x, y) + f_{\mathcal{H}_1}^2(x, y) + f_{\mathcal{H}_2}^2(x, y) + f_{\mathcal{H}_T}^2(x, y)} \\ \phi(f_A^q(x, y)) = \arg[f(x, y) + f_{\mathcal{H}_1}(x, y)i + f_{\mathcal{H}_2}(x, y)j + f_{\mathcal{H}_T}(x, y)k] \end{cases} \quad (3.39)$$

Comme pour le signal analytique 1D, la partie réelle du signal analytique f_A est constituée du signal f lui-même. De plus, on remarque que les fréquences positives sur les deux axes du spectre du signal analytique quaternionique sont les seules non nulles. Cette propriété est équivalente à celle du signal analytique 1D dont le spectre ne contient que des fréquences positives.

L'intérêt d'utiliser le signal analytique quaternionique est qu'il comprend une analyse généralisée d'un signal 2D. Tout d'abord, la partie réelle du signal analytique quaternionique est le signal lui-même. Cependant cette partie ne permet pas d'accéder aux informations du signal à un instant donné. Pour cela

l'ajout des parties imaginaires est très intéressant. On remarque notamment que la première partie imaginaire correspond à l'équivalent d'un signal analytique sur la direction horizontale tandis que la deuxième comprend l'équivalent d'un signal analytique sur la direction verticale. Enfin, la dernière partie imaginaire nous permet d'accéder comme pour le signal analytique 1D à la caractérisation à un instant donné de l'amplitude ainsi que de la phase du signal d'origine mais cette fois avec les directions horizontale et verticale rassemblées. On a ainsi avec cette définition accès à une information qui nous permet de connaître les amplitudes et les phases instantanées pour les directions horizontale et verticale séparément et de manière globale.

3.5 Approche fréquentielle quaternionique pour les images couleur

Dans cette étude, nous cherchons à analyser des signaux spatiaux quaternioniques complètement différents de ceux utilisés par Bülow car ils encodent des couleurs. Une couleur ayant généralement besoin de trois composantes pour être caractérisée, nous avons choisi d'utiliser les trois parties imaginaires d'un quaternion pour les stocker (cf. section 3.2). Cette distinction de la nature des signaux que nous utilisons nous fait donc perdre l'analyse de Bülow des structures 2D des signaux qui n'est pertinente que si ces signaux sont réels. Par la suite, nous avons choisi arbitrairement d'utiliser dans cette étude la transformée de Fourier quaternionique à gauche (cf. équation 3.25). Aussi lorsqu'on mentionnera une TFQ il s'agira de celle-ci.

3.5.1 Définition numérique de l'espace de Fourier quaternionique

Nous avons remarqué dans le premier chapitre que les traitements des images couleur par transformées de Fourier complexes n'étaient pas suffisamment pertinents pour décrire complètement la couleur. La transformée de Fourier quaternionique discrète est le résultat de l'extension de la transformée de Fourier complexe discrète au domaine des quaternions. Nous avons rappelé qu'un signal réel présente lors de l'analyse par transformée de Fourier complexe une symétrie hermitienne dans le domaine de Fourier. Dans cette partie nous allons nous poser le problème de la définition numérique de l'espace de Fourier quaternionique dans le cadre applicatif des images couleur. Nous voulons donc définir quelles propriétés sont nécessaires en terme de symétries dans le domaine fréquentiel pour correspondre à un espace quaternionique spatial dans lequel la partie réelle soit nulle ce qui permettra de représenter une image numérique couleur.

3.5.1.1 Développement de la TFQI sous forme cartésienne

On veut obtenir, après une TFQI (transformée de Fourier quaternionique inverse), une fonction dans laquelle la partie réelle sera nulle pour respecter l'espace de départ de trois composantes couleur. En se reportant à la définition de la TFQ (cf. équation 3.25) nous en déduisons la définition de la TFQI :

$$f[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} e^{2\mu\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)} F[o, p] \quad (3.40)$$

avec μ un quaternion unitaire pur donnant la direction de l'analyse tel que $\mu = \mu_i i + \mu_j j + \mu_k k$ (μ_i, μ_j et $\mu_k \in \mathbb{R}$).

Pour simplifier les calculs, on va exprimer les transformées de Fourier pour les fréquences définies sur $\left[-\frac{M}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 1\right]; \left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right]$, l'expression de la TFQI devient alors :

$$f[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} e^{2\mu\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)} F[o, p] \quad (3.41)$$

L'information spectrale est décrite sur des quaternions a priori quelconques, elle a donc la forme suivante :

$$F[o, p] = F_r[o, p] + F_i[o, p]i + F_j[o, p]j + F_k[o, p]k \quad (3.42)$$

pour le point du spectre de coordonnées fréquentielles (o, p) .

Cependant après TFQI, on voudrait obtenir $f_r = 0$ pour décrire ainsi l'information couleur sur les composantes rouge, verte et bleue du quaternion imaginaire pur de coordonnées spatiales (m, n) .

Nous devons donc calculer les conditions pour que la partie réelle soit nulle.

$$\begin{aligned} f[m, n] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \exp^{2\pi\mu\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)} F[o, p] \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_o \sum_p \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) + \mu \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) \right] \\ &\quad \cdot [F_r[o, p] + F_i[o, p]i + F_j[o, p]j + F_k[o, p]k] \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_o \sum_p \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) + \mu_i \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) \right] i \\ &\quad + \mu_j \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) j + \mu_k \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) k \\ &\quad \cdot [F_r[o, p] + F_i[o, p]i + F_j[o, p]j + F_k[o, p]k] \end{aligned}$$

Nous pouvons finir de développer le calcul sur chaque composante du résultat ainsi :

$$\begin{aligned} f_r[m, n] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_o \sum_p \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) F_r[o, p] \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) [\mu_i F_i[o, p] + \mu_j F_j[o, p] + \mu_k F_k[o, p]] \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

De la même façon nous pouvons exprimer f_i , f_j et f_k , expressions utiles pour la compréhension de la TFQ :

$$\begin{aligned} f_i[m, n] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_o \sum_p \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) F_i[o, p] \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) [-\mu_i F_r[o, p] - \mu_j F_k[o, p] + \mu_k F_j[o, p]] \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} f_j[m, n] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_o \sum_p \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) F_j[o, p] \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) [\mu_i F_k[o, p] - \mu_j F_r[o, p] + \mu_k F_i[o, p]] \right] \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} f_k[m, n] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_o \sum_p \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) F_k[o, p] \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) [-\mu_i F_j[o, p] + \mu_j F_i[o, p] - \mu_k F_r[o, p]] \right] \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.5.1.2 Propriétés de symétrie pour les images couleur

Symétries du spectre A partir de l'expression de la partie réelle de $f[m, n]$, on définit les fonctions $S_A[m, n]$ et $S_B[m, n] \in \mathbb{R}$ comme suit :

$$f_r[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_o \sum_p \left[\overbrace{\cos \left(2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) F_r[o, p]}^{S_A[m, n]} \right. \\ \left. \overbrace{-\sin \left(2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) [\mu_i F_i[o, p] + \mu_j F_j[o, p] + \mu_k F_k[o, p]]}^{S_B[m, n]} \right] \quad (3.47)$$

On cherche les conditions dans lesquelles cette partie réelle du quaternion $f[m, n]$ est nulle, il faut donc annuler les fonctions $S_A[m, n]$ et $S_B[m, n]$.

$$S_A[m, n] = \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{-1} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{-1} \cos \left(2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) F_r[o, p] + \cos(0) F_r[0, 0] \\ + \sum_{o=1}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos \left(2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) F_r[o, p] + \cos(\pi(m+n)) F_r\left[\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right] \quad (3.48)$$

On a $F_r(0, 0) + (-1)^{m+n} F_r\left(\frac{N}{2}, \frac{M}{2}\right) = 0$ donc $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ il faut que $F_r(0, 0) = F_r\left(\frac{N}{2}, \frac{M}{2}\right) = 0$.

Ensuite on a :

$$S_A[m, n] = \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{-1} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{-1} \cos \left(2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) F_r[o, p] \\ + \sum_{o=1}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos \left(2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) F_r[o, p] \\ = \sum_{o=1}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos \left(2\pi \left(\frac{-om}{M} + \frac{-pn}{N} \right) \right) F_r[-o, -p] \\ + \sum_{o=1}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1} \cos \left(2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) F_r[o, p] \quad (3.49)$$

comme $\forall x \in \mathbb{R} \cos(-x) = \cos(x)$, pour obtenir $S_A[m, n] = 0$ il faut donc que :

$$\begin{cases} F_r[-o, -p] = -F_r[o, p] \text{ pour } (o, p) \in [1; \frac{M}{2} - 1] \times [1; \frac{N}{2} - 1] \\ \text{et } F_r(0, 0) = F_r\left(\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S_B[m, n] &= \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{-1} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{-1} \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) [\mu_i F_i[o, p] + \mu_j F_j[o, p] + \mu_k F_k[o, p]] \\
&+ \sin(0) [\mu_i F_i[0, 0] + \mu_j F_j[0, 0] + \mu_k F_k[0, 0]] \\
&+ \sum_{o=1}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1} \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) [\mu_i F_i[o, p] + \mu_j F_j[o, p] + \mu_k F_k[o, p]] \\
&+ \sin(\pi(m+n)) \left[\mu_i F_i\left[\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right] + \mu_j F_j\left[\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right] + \mu_k F_k\left[\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right] \right] \\
&= \sum_{o=1}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1} \sin\left(2\pi\left(\frac{-om}{M} + \frac{-pn}{N}\right)\right) [\mu_i F_i[-o, -p] + \mu_j F_j[-o, -p] + \mu_k F_k[-o, -p]] \\
&+ \sum_{o=1}^{\frac{M}{2}-1} \sum_{p=1}^{\frac{N}{2}-1} \sin\left(2\pi\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)\right) [\mu_i F_i[o, p] + \mu_j F_j[o, p] + \mu_k F_k[o, p]]
\end{aligned} \tag{3.50}$$

comme $\forall x \in \mathbb{R} \sin(-x) = -\sin(x)$, pour obtenir $S_B[m, n] = 0$ il faut que $F_i[-o, -p] = F_i[o, p]$, $F_j[-o, -p] = F_j[o, p]$ et $F_k[-o, -p] = F_k[o, p]$ pour $(o, p) \in [0; \frac{M}{2}] \times [0; \frac{N}{2}]$.

Propriété [20] Soit F une fonction quaternionique représentant le spectre d'une image couleur. Les conditions suivantes permettent d'obtenir une fonction quaternionique pure f associée à cette image couleur après une transformée de Fourier quaternionique inverse. Ainsi il faut que $F_r[0, 0] = F_r[\frac{M}{2}, \frac{N}{2}] = 0$ et pour tout $o \in [1; \frac{M}{2} - 1]$ et $p \in [1; \frac{N}{2} - 1]$:

$$F_r[-o, -p] = -F_r[o, p] \tag{3.51}$$

Il faut de plus, pour tout $o \in [0; \frac{M}{2}]$ et $p \in [0; \frac{N}{2}]$:

$$\begin{aligned}
F_i[-o, -p] &= F_i[o, p] \\
F_j[-o, -p] &= F_j[o, p] \\
F_k[-o, -p] &= F_k[o, p]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

On retrouve donc une propriété équivalente à celle déjà connue avec l'analyse de Fourier complexe, à savoir que le spectre quaternionique d'une image couleur contient comme une symétrie anti-hermitienne.

3.5.2 Interprétation du spectre quaternionique

Une fois la transformée de Fourier quaternionique définie pour les images couleur[60], les auteurs ont cherché à donner une interprétation de ce que représentait l'information décrite par les coefficients du spectre. Une première façon d'expliquer l'information spectrale a été de décrire le spectre quaternionique avec la représentation exponentielle (cf. section 3.1.8), c'est l'objet de la première partie de cette section. Ensuite, on a séparé chaque coefficient spectral en deux, avec la notation en partie simplexe et partie perplexe pour séparer l'information de luminosité de celle de chrominance. Cette séparation permet d'exprimer comment les couleurs évoluent dans le spectre quaternionique en fonction de la luminosité et de la chromaticité [65, 29]. Cependant l'analyse proposée par ces auteurs, comme nous verrons en deuxième partie, est dépendante de la direction donnée à la transformée de Fourier quaternionique. En effet, elle n'est valable que si cette direction correspond à l'axe des niveaux de gris défini par le quaternion pur $\mu_{gris} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$. Nous présenterons, dans la dernière partie de cette section, la stratégie que nous avons développée pour appréhender le contenu fréquentiel de cette transformée de Fourier quaternionique.

3.5.2.1 Interprétation du spectre quaternionique avec la notation exponentielle

On peut exprimer le spectre de Fourier en utilisant la notion de phase de module et d'axe qui caractérisent la notation exponentielle d'un quaternion. Les illustrations de la figure 3.14 permettent d'illustrer ces notions avec le calcul d'une transformée de Fourier quaternionique sur l'image Lenna : en haut à gauche l'image originale puis à droite le module, viennent ensuite en bas à gauche la phase et à droite l'axe de cette transformée de Fourier quaternionique. La direction utilisée ici est la direction $\mu = \mu_{gris} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ car elle ne donne pas plus d'importance à une composante qu'à une autre.

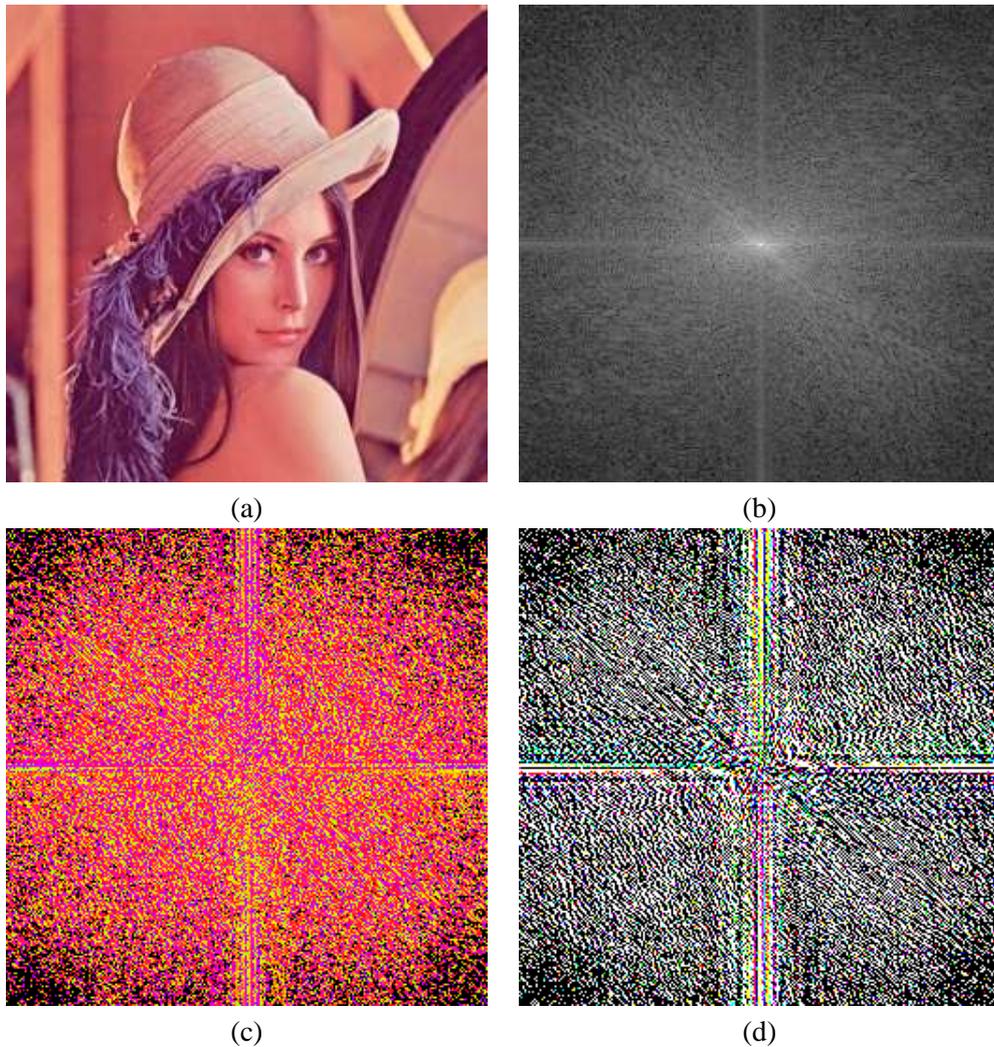


FIG. 3.14 – Les différentes représentations de la transformée de Fourier quaternionique : (a) image originale ;(b) module ; (c) phase et (d) axe.

On rappelle que si $q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \in \mathbb{H}$ alors $\exists \varphi \in \mathbb{R}, \nu \in \mathbb{P}$ tels que :

$$q = |q|e^{\nu\varphi} = |q|(\cos \varphi + \nu \sin \varphi)$$

où ν est unitaire pur et est l'axe de q , et φ son angle. Ces deux quantités sont données par les relations de l'équation (3.9).

On choisit de représenter le logarithme du module de la transformée de Fourier quaternionique comme cela est utilisé dans les visualisations de spectres.

Pour la phase et pour l'axe de la transformée de Fourier, il a été choisi de moduler les informations par un seuil sur l'amplitude du module afin de ne pas interpréter des informations non pertinentes. En effet lorsque l'amplitude du module n'est pas suffisamment importante, il y a instabilité des valeurs numériques de phase et d'axe.

La phase est exprimée entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, nous avons alors choisi de l'illustrer en codant cette variation sur la composante de Teinte d'un espace couleur « Teinte, Saturation, Clarté » (HSV).

L'axe est lui codé sur trois composantes couleur d'un espace RVB car c'est un quaternion pur.

Nous allons tenter d'interpréter les représentations graphiques précédentes de la transformée de Fourier quaternionique.

Module La représentation graphique du module ne pose pas de difficulté car elle est identique à celle que nous connaissons lorsque nous effectuons une transformée de Fourier complexe, elle correspond bien à une mesure d'énergie suivant les fréquences spatiales. La figure 3.15 illustre ce point avec différentes images et leur module quaternionique.

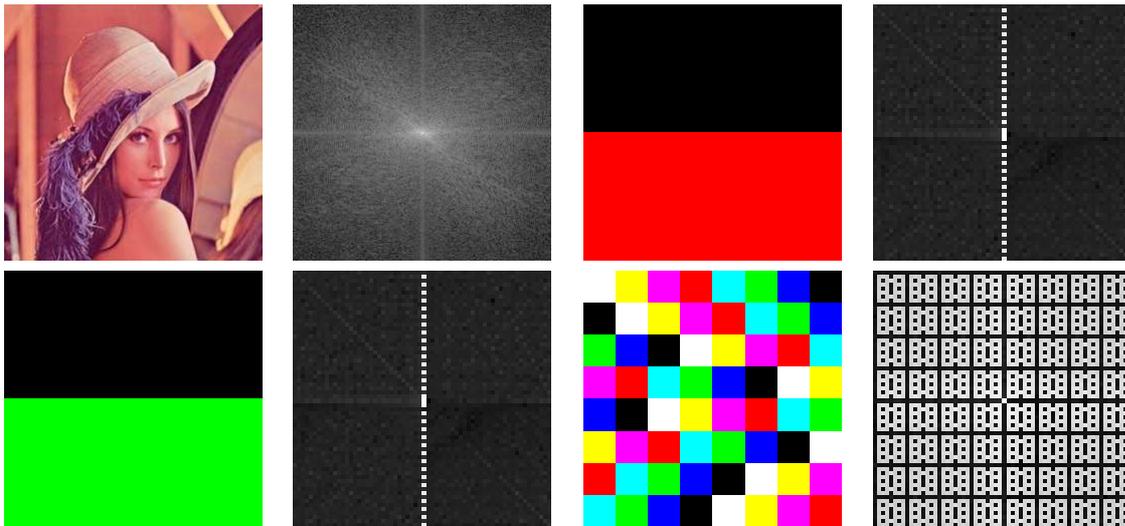


FIG. 3.15 – Images et leur modules par la TFQ

Phase et axe Il est difficile d'exprimer exactement ce qu'apportent les notions de phase et d'axe avec l'illustration d'une image complexe comme celle de Lenna. Nous remarquons toutefois que lorsque la direction de la TFQ peut être représentée par un vecteur couleur perpendiculaire aux couleurs contenues dans l'image analysée, l'angle obtenu par la TFQ reste le même et est associé à la couleur verte. Ce vert correspond à un angle de $\frac{\pi}{2}$, l'information de phase n'est pas pertinente. Par exemple pour la figure 3.16 la direction de la TFQ est $\mu = i$; pour les images bleue, verte et cyan, images dans lesquelles aucun pixel n'est fonction du « rouge », l'angle apparaît non pertinent avec une valeur de $\frac{\pi}{2}$. Au contraire pour les autres images on retrouve une variation de la couleur représentant l'angle, synonyme que celui-ci apporte de l'information pour ces images. Nous pouvons donc conclure que si l'information d'angle apparaît avec une teinte verte, et ce quelque soit la direction de la transformée de Fourier, la phase n'est pas pertinente.

Nous n'avons cependant pas pu tirer d'autres conclusions générales quand aux informations contenues dans l'angle et l'axe obtenus après QFT pour une direction d'analyse quelconque. Cependant, si nous choisissons la direction d'analyse de la transformée de Fourier suivant l'axe des niveaux de gris, il est possible d'avoir un peu plus d'information sur ces deux notions. Ell et Sangwine[29] effectuent une transformée de Fourier quaternionique de direction μ_{gris} sur une image comportant un fond uni de couleur jaune saturé à la moitié de la valeur maximale et un petit carré sur le côté supérieur gauche dont la couleur est opposée dans l'espace couleur HSV à celle du fond, soit le bleu, lui aussi à moitié saturé. Ils illustrent le résultat en affichant les vues de module, d'angle et de phase définis de la même manière que précédemment. Nous effectuons la même analyse que nous illustrons avec deux images afin de pouvoir comparer les résultats dans la figure 3.17. La deuxième image est construite comme la première mais avec les couleurs inversées.

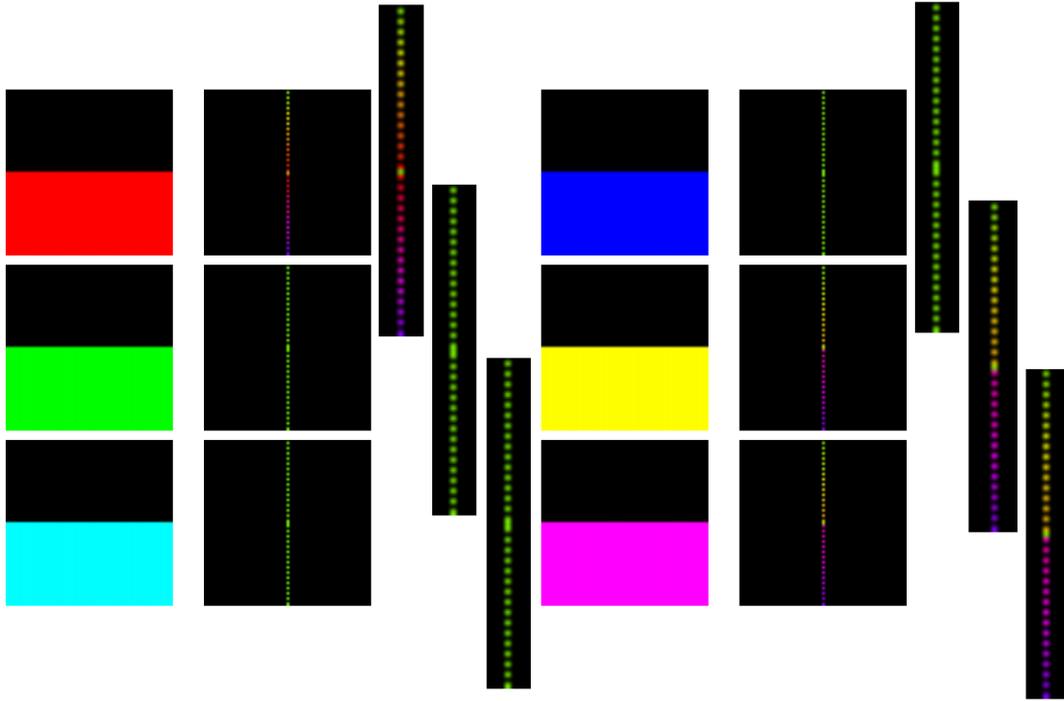


FIG. 3.16 – Images et leur angle par la TFQ avec $\mu = \mu_{Rouge} = i$

La vue du module nous montre une forme de lobe caractéristique d'une impulsion donc elle est cohérente. On observe qu'il n'y a pas de couleur verte pour caractériser la phase ce qui revient à dire qu'elle est définie partout dans l'image. On remarque également des oscillations des valeurs de la phase ainsi que de l'angle dans la direction attendue, en effet ces oscillations suivent une direction « Sud-Est » correspondant à l'axe sur lequel se situe le petit carré en haut à gauche. La deuxième figure montre qu'en échangeant les couleurs dans l'image d'origine on ne change pas le module, ni même l'orientation des oscillations de phase et d'axe comme attendu. De plus, on constate que la phase obtenue avec la deuxième image suit des oscillations complémentaires à celles obtenues avec la première image ce qui est cohérent car les couleurs analysées par la TFQ sont complémentaires. On observe le même comportement entre les deux vues de l'axe. Cependant, ces observations ne nous permettent pas d'en dire d'avantage tout comme les auteurs [29].

3.5.2.2 Interprétation du spectre quaternionique en y associant luminosité et chromaticité

Une autre façon d'analyser le contenu fréquentiel obtenu par transformée de Fourier quaternionique est donnée dans [29]. Cette fois, on sépare les coefficients du spectre en utilisant les notations parallèle/perpendiculaire et la décomposition symplectique (cf. sections 3.1.13 et 3.1.11). Cependant, pour commencer, on choisit d'extraire quatre coefficients du spectre aux coordonnées (O_0, P_0) et ses symétriques dans les trois autres quadrants fréquentiels du spectre.

On applique la TFQ inverse de direction $\mu = \mu_{gris}$ à partir des quatre coefficients symétriques et on obtient, après simplification, une somme partielle $f'[m, n]$ de la transformée qui correspond à l'apport des quatre combinaisons de fréquences horizontales et verticales, positives et négatives dans l'image spatiale $f[m, n]$:

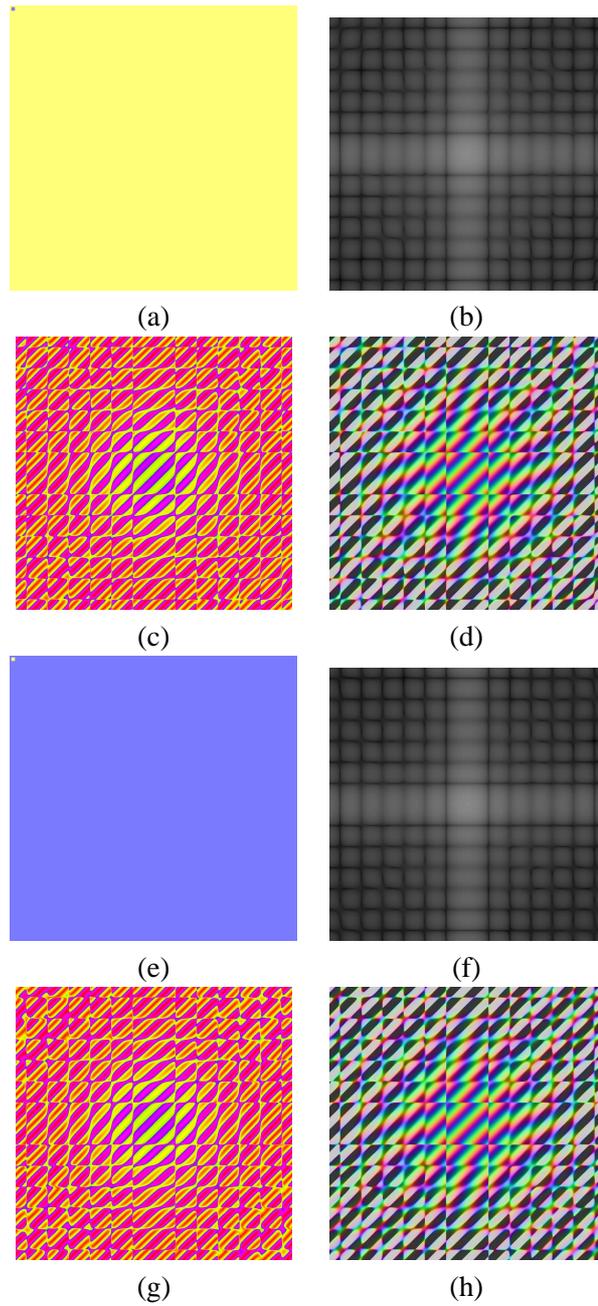


FIG. 3.17 – Images originales (a) et (e) ; leur module (b) et (f) ; leur phase (c) et (g) et leur axe (d) et (h) par la TFQ

$$\begin{aligned}
 f'[m, n] = & \exp^{2\pi\mu\left(\frac{O_0^m}{M} + \frac{P_0^n}{N}\right)} F[O_0, P_0] \\
 & + \exp^{-2\pi\mu\left(\frac{O_0^m}{M} + \frac{P_0^n}{N}\right)} F[-O_0, -P_0] \\
 & + \exp^{2\pi\mu\left(\frac{O_0^m}{M} - \frac{P_0^n}{N}\right)} F[O_0, -P_0] \\
 & + \exp^{-2\pi\mu\left(\frac{O_0^m}{M} - \frac{P_0^n}{N}\right)} F[-O_0, P_0]
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Il est expliqué dans [29] que chaque exponentielle définit la normale du plan de chrominance dans l'espace couleur pour le cas où l'on choisit pour direction de la transformée $\mu = \mu_{gris}$.

N'importe quel coefficient du spectre peut être séparé en deux parties parallèle et perpendiculaire à l'axe μ_{gris} de la transformée en utilisant la décomposition symplectique :

$$F[O_0, P_0] = F_{\parallel}[O_0, P_0] + F_{\perp}[O_0, P_0] \quad (3.54)$$

avec $F_{\parallel}[O_0, P_0] = F_1[O_0, P_0]$ et $F_{\perp}[O_0, P_0] = F_2[O_0, P_0]\mu_2$. Donc la partie parallèle est la partie simplexe de $F[O_0, P_0]$ et la partie perpendiculaire est le résultat de la multiplication de la partie perplexe de $F[O_0, P_0]$ avec μ_2 (un quaternion pur perpendiculaire à μ_{gris}). La forme polaire est ensuite utilisée pour exprimer les parties parallèle et perpendiculaire avec :

$$F[O_0, P_0] = A_{\parallel} \exp^{\mu\theta_1} + A_{\perp} \exp^{\mu\theta_2} \mu_2 \quad (3.55)$$

Les parties parallèle et perpendiculaire du coefficient $F[O_0, P_0]$ multiplient les fonctions exponentielles de la transformée de Fourier quaternionique pour produire une image cosinusoidale. Cette image cosinusoidale est caractérisée par les fréquences horizontales et verticales données par les indices O_0 et P_0 , et possède une amplitude, une phase et une orientation données par la valeur du coefficient $F[O_0, P_0]$.

La partie parallèle intéragit avec les exponentielles de la transformée sans changer son axe :

$$\exp^{\mu(\alpha m + \beta n)} A_{\parallel} \exp^{\mu\theta_1} = A_{\parallel} \exp^{\mu(\alpha m + \beta n + \theta_1)} \quad (3.56)$$

avec $\alpha = 2\pi \frac{O_0}{M}$ et $\beta = 2\pi \frac{P_0}{N}$ les fréquences horizontales et verticales.

La phase θ_1 est donc simplement celle de la partie parallèle et A_{\parallel} est son amplitude.

Cependant lorsque que l'on multiplie les exponentielles de la transformée par la partie perpendiculaire $A_{\perp} e^{\mu\theta_2} \mu_2$, on agit sur l'axe des exponentielles de la transformée de Fourier comme suit (ceci seulement parce que μ_2 est perpendiculaire à μ) :

$$e^{\mu(\alpha m + \beta n)} A_{\perp} e^{\mu\theta_2} \mu_2 = A_{\perp} e^{\mu(\alpha m + \beta n + \theta_2)} \mu_2 \quad (3.57)$$

Ainsi comme la direction de la transformée de Fourier utilisée ici est μ_{gris} , l'angle θ_2 représente l'angle initial du vecteur μ_2 qui est perpendiculaire au vecteur μ_{gris} . Comme μ_2 tourne autour de μ_{gris} , il définit un plan. Un plan perpendiculaire à l'axe des niveaux de gris est un plan de chrominance et l'angle θ_2 est utilisé pour donner une valeur initiale au vecteur μ_2 dans ce plan, il représente donc une notion de teinte. A_{\perp} matérialise l'amplitude de la rotation.

On voit qu'avec cette approche on analyse le contenu de l'information fréquentielle avec des vecteurs qui effectuent des rotations dans l'espace couleur. Ces rotations peuvent être caractérisées par des chemins couleur comme nous l'avons vu lors du premier chapitre puisque l'on effectue les rotations sur le plan de chrominance. La théorie de Mc-Cabe[48] est alors utile pour appréhender la construction de chemins couleur qui sont des sommes de chemins de bases. Le chemin couleur total décrivant la participation des fréquences O_0, P_0 ainsi que leurs symétriques dans le spectre est donné ici :

$$\begin{aligned} f'[m, n] = & e^{\mu(\alpha m + \beta n)} \left(A_{\parallel}^+ e^{\mu\theta_1^+} + A_{\perp}^+ e^{\mu\theta_2^+} \mu_2 \right) \\ & + e^{\mu(\alpha m - \beta n)} \left(B_{\parallel}^+ e^{\mu\phi_1^+} + B_{\perp}^+ e^{\mu\phi_2^+} \mu_2 \right) \\ & + e^{-\mu(\alpha m - \beta n)} \left(B_{\parallel}^- e^{-\mu\phi_1^-} + B_{\perp}^- e^{-\mu\phi_2^-} \mu_2 \right) \\ & + e^{-\mu(\alpha m + \beta n)} \left(A_{\parallel}^- e^{-\mu\theta_1^-} + A_{\perp}^- e^{-\mu\theta_2^-} \mu_2 \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{aligned} F[O_0, P_0] &= A_{\parallel}^+ e^{\mu\theta_1^+} + A_{\perp}^+ e^{\mu\theta_2^+} \mu_2 \\ F[-O_0, -P_0] &= A_{\parallel}^- e^{-\mu\theta_1^-} + A_{\perp}^- e^{-\mu\theta_2^-} \mu_2 \\ F[O_0, -P_0] &= B_{\parallel}^+ e^{\mu\phi_1^+} + B_{\perp}^+ e^{\mu\phi_2^+} \mu_2 \\ F[-O_0, P_0] &= B_{\parallel}^- e^{-\mu\phi_1^-} + B_{\perp}^- e^{-\mu\phi_2^-} \mu_2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

On obtient, grâce aux symétries comprises dans le spectre quaternionique, un chemin couleur dont la variation de luminosité suit l'axe des niveaux de gris. Par contre, pour la variation de chromaticité, le chemin total décrit une ellipse dans le plan chromatique.

3.5.2.3 Interprétation du spectre par initialisation de Dirac

Afin d'explicitier d'une autre manière l'information fréquentielle incluse dans l'espace numérique fréquentiel quaternionique nous proposons une autre stratégie. Pour cela, nous avons choisi d'étudier l'influence de l'initialisation d'un Dirac dans le domaine fréquentiel sur une image (domaine spatial obtenu après transformée de Fourier inverse).

Insertion d'une singularité En initialisant un point dans le domaine fréquentiel par une constante, on veut interpréter le résultat obtenu dans le domaine spatial après transformée de Fourier Inverse. Ceci permet de mettre en évidence les atomes élémentaires liés au spectre quaternionique.

$$\begin{aligned} f[m, n] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \exp^{2\pi\mu\left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N}\right)} F[o, p] \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum \sum \exp^{2\pi\mu\frac{om}{M}} \exp^{2\pi\mu\frac{pn}{N}} F[o, p] \end{aligned} \quad (3.60)$$

On initialise F_r

$$F_r[0, 0] = F_r\left[\frac{M}{2}, \frac{N}{2}\right] = 0$$

$$F_r[-o, -p] = -F_r[o, p]$$

Dans ce cas, il faut insérer deux points de la manière suivante : $F_r[o_0, p_0] = K_r$ et $F_r[-o_0, -p_0] = -K_r$

on obtient donc :

- $f_r[m, n]$

$$f_r[m, n] = K_r \cos\left(2\pi\left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N}\right)\right) - K_r \cos\left(2\pi\left(\frac{-o_0 m}{M} + \frac{-p_0 n}{N}\right)\right)$$

donc

$$f_r[m, n] = (K_r - K_r) \cos\left(2\pi\left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N}\right)\right) = 0$$

La partie réelle est donc bien nulle comme nous l'avons décidé en initialisant le spectre quaternionique correctement. Intéressons nous maintenant aux autres composantes :

- $f_i[m, n]$

$$f_i[m, n] = K_r \mu_i \sin\left(2\pi\left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N}\right)\right) - K_r \mu_i \sin\left(2\pi\left(\frac{-o_0 m}{M} + \frac{-p_0 n}{N}\right)\right)$$

donc

$$f_i[m, n] = 2K_r \mu_i \sin\left(2\pi\left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N}\right)\right)$$

- $f_j[m, n]$ et $f_k[m, n]$

Le calcul est le même que pour $f_i[m, n]$, on obtient donc :

$$f_j[m, n] = 2K_r \mu_j \sin\left(2\pi\left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N}\right)\right)$$

et

$$f_k[m, n] = 2K_r\mu_k \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right)$$

On constate que la partie réelle du spectre quaternionique est associée aux évolutions impaires suivant les trois composantes couleur pondérées par la direction d'analyse μ .

On initialise F_i

$$F_i[-o, -p] = F_i[o, p]$$

Dans ce cas, il faut insérer deux points de la manière suivante : $F_i[o_0, p_0] = F_i[-o_0, -p_0] = K_i$ on obtient donc :

– $f_r[m, n]$

$$f_r[m, n] = -K_i\mu_i \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right) - K_i\mu_i \sin \left(2\pi \left(\frac{-o_0m}{M} + \frac{-p_0n}{N} \right) \right)$$

donc

$$f_r[m, n] = (-K_i\mu_i + K_i\mu_i) \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right) = 0$$

– $f_i[m, n]$

$$f_i[m, n] = K_i \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right) + K_i \cos \left(2\pi \left(\frac{-o_0m}{M} + \frac{-p_0n}{N} \right) \right)$$

donc

$$f_i[m, n] = 2K_i \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right)$$

– $f_j[m, n]$

$$f_j[m, n] = -K_i\mu_k \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right) - K_i\mu_k \sin \left(2\pi \left(\frac{-o_0m}{M} + \frac{-p_0n}{N} \right) \right)$$

donc

$$f_j[m, n] = (-K_i\mu_k + K_i\mu_k) \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right) = 0$$

– $f_k[m, n]$

$$f_k[m, n] = -K_i\mu_j \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right) - K_i\mu_j \sin \left(2\pi \left(\frac{-o_0m}{M} + \frac{-p_0n}{N} \right) \right)$$

donc

$$f_k[m, n] = (-K_i\mu_j + K_i\mu_j) \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0m}{M} + \frac{p_0n}{N} \right) \right) = 0$$

On constate que la partie associée à « i » capte les évolutions paires suivant la première composante couleur et ceci quelque soit la direction d'analyse de la TFQ.

On initialise F_j

$$F_j[-o, -p] = F_j[o, p]$$

Dans ce cas, il faut insérer deux points de la manière suivante : $F_j[o_0, p_0] = F_j[-o_0, -p_0] = K_j$

$$f_j[m, n] = 2K_j \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right)$$

Les valeurs de $f_r[m, n]$, $f_i[m, n]$ et $f_k[m, n]$ étant nulles (cf. calculs partie précédente). Les résultats se calculent de manière similaire à ceux de la constante initialisée à K_i , on obtient donc une variation paire sur la composante « j ».

On initialise F_k

$$F_k[-o, -p] = F_k[o, p]$$

Dans ce cas, il faut insérer deux points de la manière suivante : $F_k[o_0, p_0] = F_k[-o_0, -p_0] = K_k$

La même chose est à remarquer dans ce cas.

$$f_k[m, n] = 2K_k \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right)$$

Les valeurs de $f_r[m, n]$, $f_i[m, n]$ et $f_j[m, n]$ étant nulles (cf. calculs partie précédente), on obtient une variation en cosinus sur la composante « k ».

Influence du choix de μ L'interprétation de l'initialisation du domaine fréquentiel quaternionique par un Dirac peut alors se diviser en deux parties :

- L'atome associé à une composante imaginaire est une variation paire sur la couleur associée. Donc un Dirac dans le fréquentiel sur une composante « i » donnera une variation de couleur suivant la composante « i » dans le domaine spatial. Il apparaît également que le coefficient μ n'a pas d'influence lors de l'initialisation de la constante si elle est prise seulement sur les composantes imaginaires de l'espace d'insertion fréquentiel.
- Lorsqu'on affecte un point de l'espace fréquentiel par un Dirac sur la composante réelle, il en résulte une variation impaire de couleur suivant la direction donnée par le terme μ .

Nous illustrons ci-dessous l'initialisation du spectre avec des images en couleur dans l'espace RVB (cf. figure 3.18).

Initialisation sur les parties imaginaires du spectre avec un $\mu_{quelconque}$ Lorsqu'on initialise un point fréquentiel sur une ou plusieurs parties imaginaires du spectre, en utilisant la transformée de Fourier quaternionique inverse, nous obtenons comme décrit dans la partie précédente des oscillations de couleurs. La couleur dominante de ces oscillations correspond à ou aux axes concernés par l'initialisation c'est à dire que lorsqu'on initialise la première composante imaginaire du spectre par exemple, l'oscillation obtenue sera décrite sur la première composante de l'image spatiale soit le rouge (cf. figure 3.18).

Pour chacune des images l'initialisation a été faite comme suit

- 1^{ere} ligne, 1^{ere} image : init avec μLum $F_i[o, p] = K_i$ et $F_i[-o, -p] = K_i$
- 1^{ere} ligne, 2^{ie} image : init avec μLum $F_j[o, p] = K_j$ et $F_j[-o, -p] = K_j$
- 1^{ere} ligne, 3^{ie} image : init avec μLum $F_k[o, p] = K_k$ et $F_k[-o, -p] = K_k$
- 2^{ie} ligne, 1^{ere} image : init avec μLum $F_i[o, p] = K_i$, $F_j[o, p] = K_j$, $F_i[-o, -p] = K_i$ et $F_j[-o, -p] = K_j$
- 2^{ie} ligne, 2^{ie} image : init avec μLum $F_i[o, p] = K_i$, $F_k[o, p] = K_k$, $F_i[-o, -p] = K_i$ et $F_k[-o, -p] = K_k$
- 2^{ie} ligne, 3^{ie} image : init avec μLum $F_j[o, p] = K_j$, $F_k[o, p] = K_k$, $F_j[-o, -p] = K_j$ et $F_k[-o, -p] = K_k$
- 3^{ie} ligne : initialisation avec μLum $F_i[o, p] = K_i$, $F_j[o, p] = K_j$, $F_k[o, p] = K_k$, $F_i[-o, -p] = K_i$, $F_j[-o, -p] = K_j$ et $F_k[-o, -p] = K_k$

Nous constatons que les couleurs obtenues respectent aussi la loi de la synthèse additive car ajoutées entre elles, elles forment le blanc.



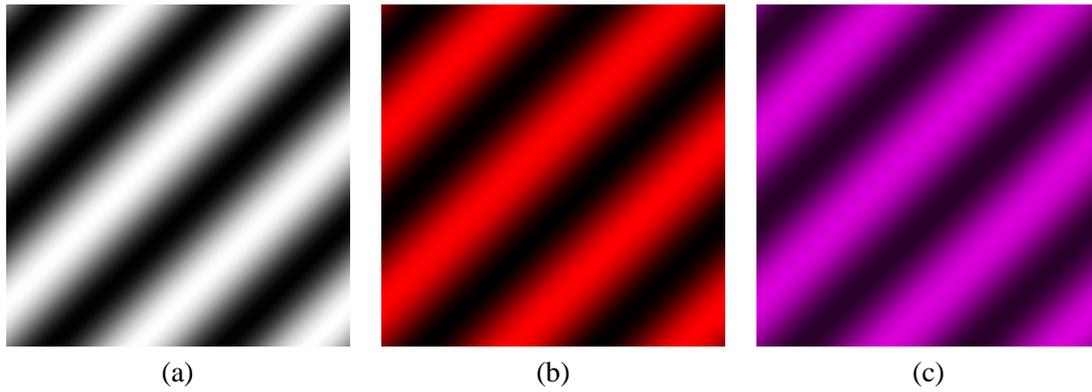
FIG. 3.18 – Exemples d’initialisation avec un μ_{Lum}

Initialisation sur la partie réelle du spectre avec $\mu \neq \mu_{Lum}$ Comme nous avons vu dans la partie calculatoire, il est aussi possible d’initialiser le spectre sur sa partie réelle. Dans ce cas, en respectant les conditions d’initialisation, on peut obtenir aussi des variations de couleur. Il faut alors jouer sur la direction de la transformée de Fourier quaternionique pour obtenir des couleurs différentes (cf. figure 3.19).

Pour chacune des images l’initialisation a été faite comme suit

- 1^{ère} image : init avec $\mu_{Lum} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$, $F_r[o, p] = K_r$ et $F_r[-o, -p] = -K_r$
- 2^{ie} image : init avec $\mu_{Rouge} = i$, $F_r[o, p] = K_r$ et $F_r[-o, -p] = -K_r$
- 3^{ie} image : init avec $\mu_{Magenta} = \frac{i+k}{\sqrt{2}}$, $F_r[o, p] = K_r$ et $F_r[-o, -p] = -K_r$

On remarque donc que la variation de couleur obtenue est fonction de la direction donnée à la transformée de Fourier. Par exemple, si la direction μ vaut $\frac{i+k}{\sqrt{2}}$, le résultat sera une variation impaire sur les deux composantes i et k (cf. figure 3.19b). Ceci équivaut à une variation avec autant d’amplitude dans le rouge que le bleu soit d’après la synthèse additive le magenta.

FIG. 3.19 – Exemples d’initialisation avec un $\mu \neq \mu_{Lum}$

Variations géométriques Comme nous l’avons vu, le spectre quaternionique vérifie la notion de distributivité de l’énergie en fonction de la géométrie. Nous pouvons donc régler l’orientation des variations de couleur suivant les coordonnées des points affectés en amplitude dans le domaine fréquentiel. Cette orientation suivra un axe perpendiculaire à la droite reliant les deux points affectés par l’initialisation d’amplitude fréquentielle et passant par l’origine.

Nous choisissons, par exemple, pour la figure suivante (cf. figure 3.20) d’illustrer différentes orientations spatiales en fonction des points du plan fréquentiel initialisés en amplitude (oscillations dans le jaune).

Pour chacune des images l’initialisation a été faite comme suit

- 1^{ere} ligne, 1^{ere} image : init avec $\mu_{Jaune}F_r[o, p] = K_r$ et $F_r[-o, -p] = -K_r$
- 1^{ere} ligne, 2^{ie} image : init avec $\mu_{Jaune}F_r(o, -p) = K_r$ et $F_r(-o, p) = -K_r$
- 2^{ie} ligne, 1^{ere} image : init avec $\mu_{Jaune}F_r(0, p) = K_r$ et $F_r(0, -p) = -K_r$
- 2^{ie} ligne, 2^{ie} image : init avec $\mu_{Jaune}F_r(-o, 0) = K_r$ et $F_r(o, 0) = -K_r$

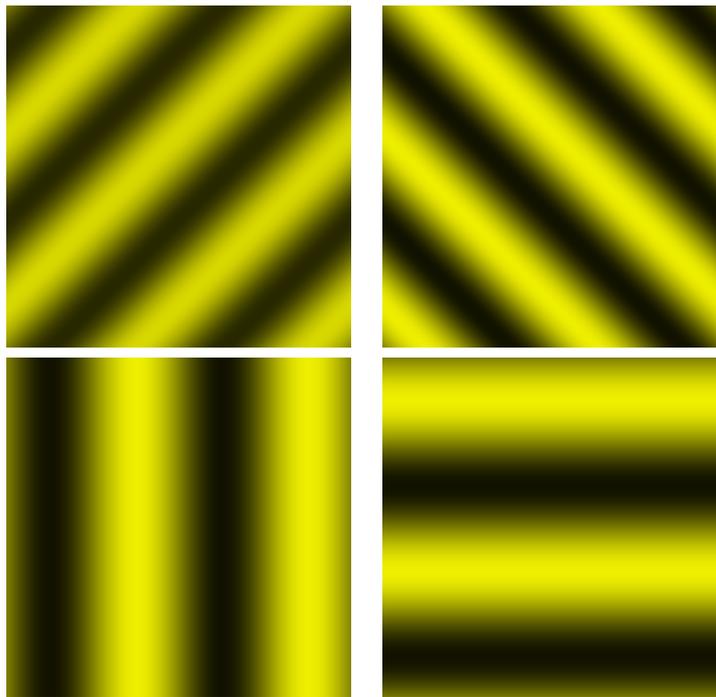


FIG. 3.20 – Exemples de variations géométriques des raies de couleur

Nous allons maintenant illustrer une utilisation possible du spectre de Fourier caractérisant des images couleur. L'application que nous développons est la même que celle utilisée par les complexes, à savoir un schéma de filtrage.

3.5.3 Applications

A notre connaissance, on ne peut trouver dans la littérature que quelques applications à la transformée de Fourier quaternionique. L'information fréquentielle contenue dans le spectre quaternionique est par exemple utilisée en tatouage d'image numérique [2, 3]. La TFQ a aussi été utilisée pour calculer des corrélations d'images couleur [64, 50, 53]. A partir de l'étude fréquentielle que nous avons menée, nous pouvons proposer une approche de filtrage fréquentiel, ceci afin d'effectuer des traitements bas-niveaux sur le spectre quaternionique d'images couleur.

3.5.3.1 Filtrage fréquentiel

Pour faire du filtrage fréquentiel, notre approche est la même que celle avec des images en niveaux de gris à savoir un simple fenêtrage. Nous appliquons donc une transformée de Fourier quaternionique sur une image couleur pour obtenir son équivalent en terme de fréquence. Nous appliquons ensuite un masque correspondant au gabarit du filtre désiré sur le spectre obtenu, en réduisant au choix les informations de basses ou de hautes fréquences. Finalement, nous appliquons une transformée de Fourier quaternionique inverse et nous obtenons l'image filtrée :

$$f_{\text{Filt}} = TFQI\{H.F\} \quad (3.61)$$

avec $F = TFQ(f)$ la transformée de Fourier quaternionique de l'image originale et H la réponse fréquentielle du filtre.

La figure 3.21 illustre les résultats obtenus pour un filtrage passe-haut avec cette méthode (on a $H[o, p] = 1 \forall o, p \in [-\frac{M}{2} + 1; \frac{M}{2}] \times [-\frac{N}{2} + 1; \frac{N}{2}]$). Cette figure montre que ce filtrage fréquentiel conserve les couleurs des images originales et que le contenu haute-fréquence est bien isolé du reste des images. En effet les contours des rectangles dans la figure 3.21g, du cercle et du quadrilatère dans la figure 3.21h sont de la même couleur que dans l'image originale. Les mêmes constatations sont possibles avec les détails du chapeau de l'image de Lenna filtrée dans la figure 3.21c et de la bouche dans la figure 3.21d. Toutefois, nous avons utilisé un simple fenêtrage dans le domaine fréquentiel et cela a pour conséquence d'introduire des phénomènes d'oscillations sur les contours des images filtrées. Même si le produit fréquentiel n'est pas équivalent au produit de convolution spatial avec les quaternions, nous remarquons donc qu'il apparaît un type d'artefacts équivalent à ceux introduits par un fenêtrage fréquentiel par une fonction porte sur des images en niveaux de gris. On remarque que les oscillations induites par notre fenêtrage fréquentiel varient entre les couleurs originales des images et leurs complémentaires⁵ dans l'espace RVB . Par exemple, pour le cercle la variation est entre le rouge et son complémentaire le vert et pour le quadrilatère la variation est entre le bleu et son complémentaire le jaune. On illustre ainsi l'interprétation du spectre dont les coefficients traversent des chemins elliptiques sur le plan chromatique tandis qu'ils gardent à peu près la même clarté, en effet la direction utilisée ici est l'axe des niveaux de gris μ_{gris} .

La figure 3.22 illustre le résultat du même filtrage mais effectué en utilisant des directions de transformées différentes. On remarque que les résultats sont les mêmes quelque soit la direction utilisée pour effectuer la transformée de Fourier même pour des images ne comportant qu'une seule couleur alors que la direction de l'analyse n'est pas celle-ci. En fait à partir de notre analyse précédente sur le domaine de Fourier, il n'est pas étonnant de retrouver les mêmes résultats avec des directions différentes. En effet, nos images couleurs sont encodées en utilisant les trois composantes imaginaires d'un quaternion. Que

⁵On parle du complémentaire en synthèse additive. Si on se place dans le cercle des couleurs primaires, le complémentaire d'une couleur est celle qui lui est directement opposée dans le cercle. Autrement dit si l'on trace une ligne passant par l'origine et une couleur, sa complémentaire se trouve à l'intersection de cette ligne et de l'autre extrémité du cercle.

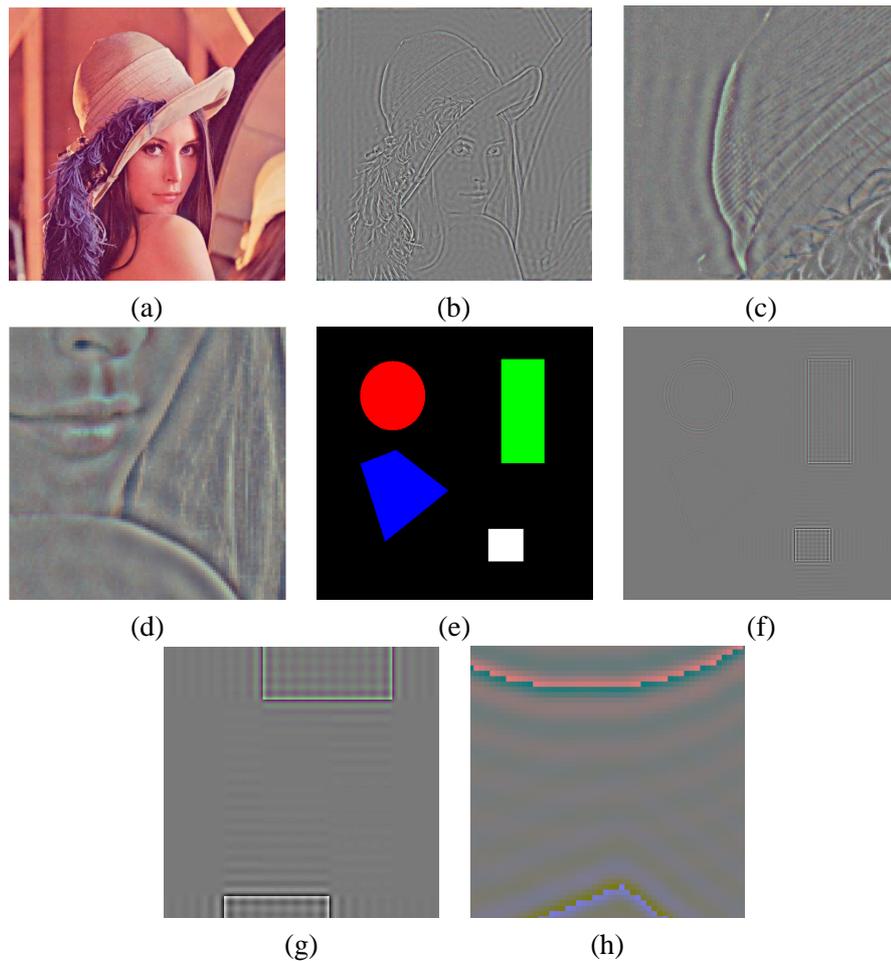


FIG. 3.21 – **Résultats du filtrage quaternionique passe-haut** : (a) image originale de Lenna ; (b) passe-haut appliqué sur (a) ; (c) détails du chapeau ; (d) détails du visage ; (e) image couleur simple ; (f) passe-haut appliqué sur (e) ; (g) détails des contours des rectangles vert et blanc ; (h) détails des contours du cercle rouge et du quadrilatère bleu. On remarque que le filtrage fréquentiel préserve les couleurs des images originales.

se passe-t-il une fois l'information spatiale traduite en information fréquentielle ? Et bien tout comme une initialisation sur une composante imaginaire du spectre décrit la variation de couleur spatiale sur la même direction et quelque soit la direction d'analyse, il en va de même lors de l'analyse pratique. Nous remarquons même que pour l'image constituée uniquement des formes de couleur plus ou moins rouge, le filtrage passe-haut détecte la couleur même avec une direction suivant le bleu.

La figure 3.23 montre que cette stratégie de filtrage est suffisante pour pouvoir détecter des contours. Une carte des contours est obtenue par seuillage des valeurs absolues des images filtrées. Cette approche peut être généralisée au filtrage par bande de fréquences. De plus, les résultats montrés sont obtenus en utilisant le paramètre de direction μ_{gris} de la TFQ qui ne privilégie aucune couleur par rapport aux autres.

3.5.3.2 Banc de filtres quaternioniques

A partir de notre étude du domaine de Fourier quaternionique, un premier banc de filtre quaternionique à reconstruction parfaite, appliqué aux images couleur, a été développé au sein de l'équipe [10]. La difficulté principale repose sur la définition des différents filtres fréquentiels permettant d'obtenir une reconstruction parfaite de l'image. La figure 3.24 illustre les résultats obtenus par cette méthode sur une image couleur test composée de formes simples ainsi qu'une image naturelle. Nous pouvons observer

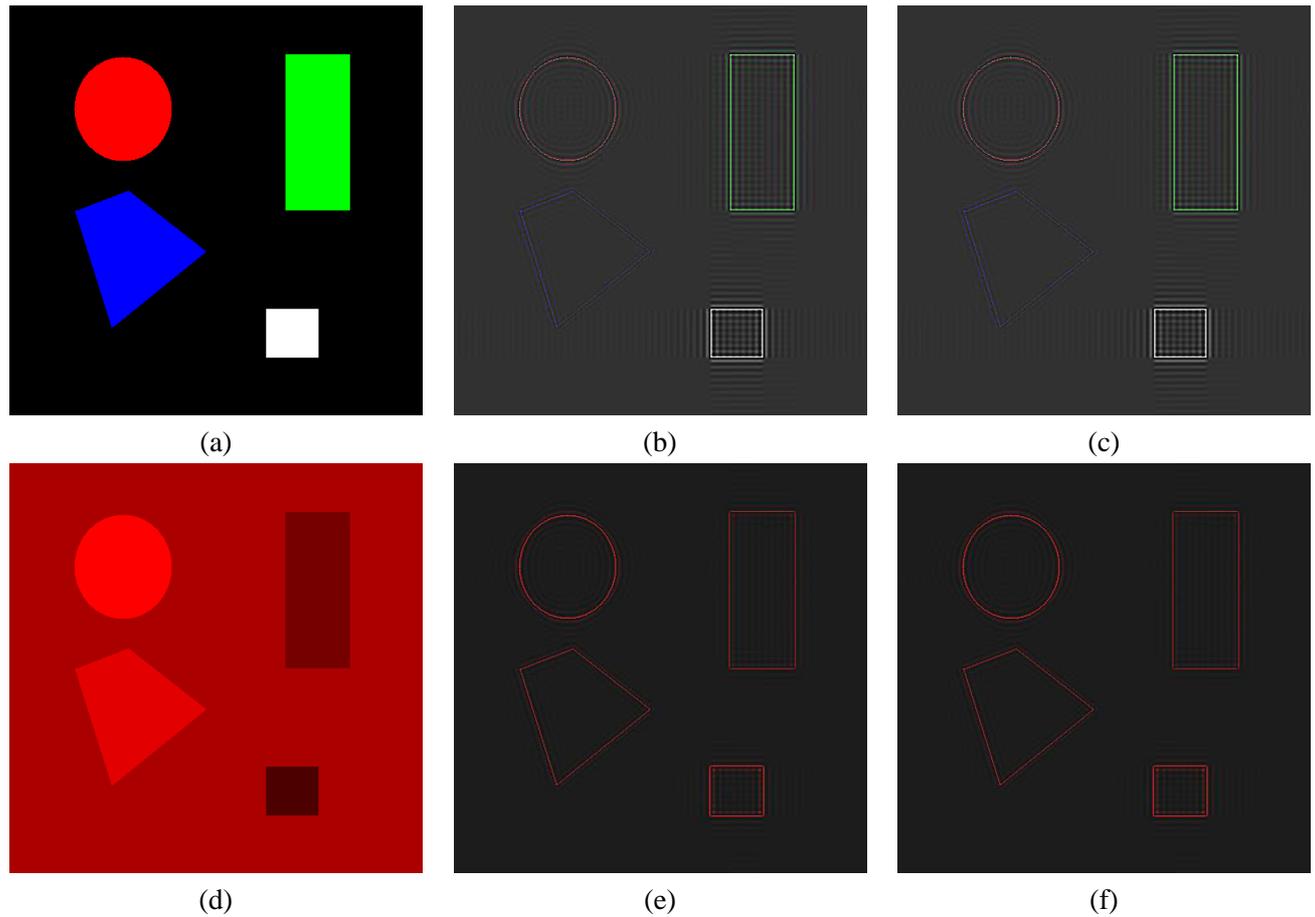


FIG. 3.22 – Résultats du filtrage quaternionique passe-haut avec des directions différentes : (a) image originale ; (b) passe-haut avec direction $\mu = I$ (réhaussé) ; (c) passe-haut avec direction $\mu = \mu_{gris}$ (réhaussé) ; (d) image originale ne comportant que des nuances de rouge ; (e) passe-haut avec direction $\mu = I$ donc associé à la couleur rouge (réhaussé) ; (f) passe-haut avec direction $\mu = K$ soit associé à la couleur bleue (réhaussé).

avec les résultats que la représentation contient tous les éléments attendus : la partie passe-bas correspond à l'approximation grossière de l'image d'origine tandis que l'information haute fréquence paraît plus dispersée : les coefficients sont importants uniquement si des contours sont présents dans le support de l'ondelette. De plus, les couleurs représentées par les coefficients comportent de l'information sur les couleurs des discontinuités que les coefficients détectent (couleurs complémentaires). Une copie de l'article est présentée à l'annexe C.

3.6 Conclusion

Nous avons pu au cours de ce chapitre étudier l'opportunité d'utiliser les quaternions pour encoder les trois composantes nécessaires pour décrire une couleur. Une couleur étant encodée sur la partie vectorielle d'un quaternion, il devient plus facile de manipuler les couleurs entre elles. Après avoir défini quelques transformations géométriques en utilisant les quaternions nous avons développé une approche spatiale de détection de contours. Ce détecteur de contour est basé sur la définition d'un gradient de saturation et détecte correctement les ruptures chromatiques, cependant il est inefficace pour les ruptures achromatiques. Ensuite, nous avons effectué une étude des différentes définitions des transformées de Fourier quaternioniques dont deux d'entre elles ont été détaillées. La première, définie par Bülow, permet de faire apparaître des attributs locaux sur des images réelles c'est à dire en niveaux de gris. Cette analyse permet ainsi la caractérisation de structures 2D de ce type de signaux. Ensuite, nous avons

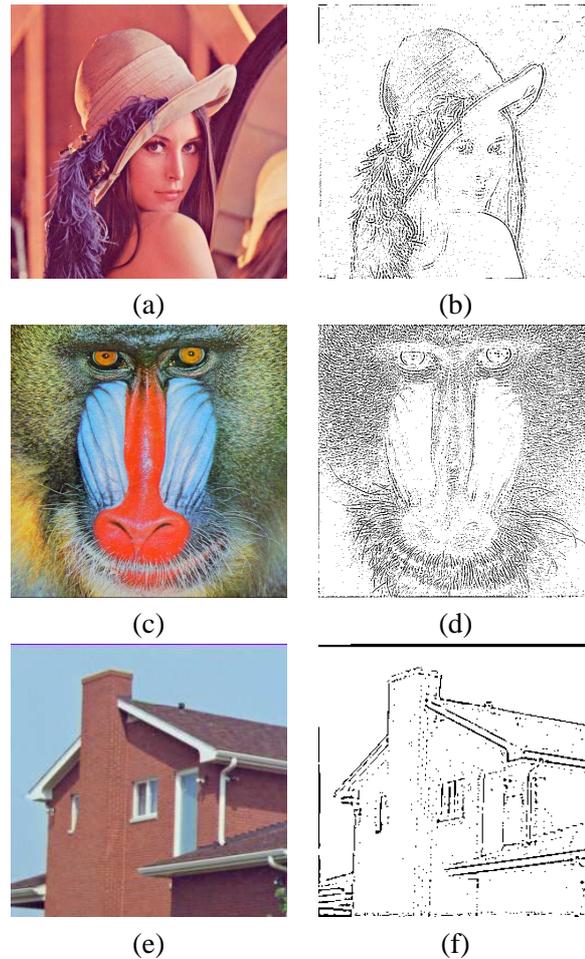


FIG. 3.23 – **Détection de contours par filtrage quaternionique passe-haut** : (a) image originale de Lenna ; (b) carte des contours par passe-haut à partir de (a) ; (c) image originale du babouin ; (d) carte des contours par passe-haut à partir de (c) ; (e) image originale de la maison ; (f) carte des contours par passe-haut à partir de (e).

étudié précisément la transformée de Fourier quaternionique appliquée aux images couleur définie par Sangwine. Nous avons tout d'abord analysé comment se comportait numériquement cette transformée, c'est à dire quelles contraintes étaient ajoutées à la transformée du fait de son utilisation dans le cadre spécifique des images numériques couleur. Une série de symétries dues à ces contraintes est d'ailleurs apparue. Ensuite, plusieurs interprétations du contenu fréquentiel ont été apportées mais des problèmes d'interprétation de l'information spectrale persistent. Lorsque la direction de la transformée est l'axe des niveaux de gris, une interprétation qui reprend l'analyse spectrale de McCabe par les chemins couleur est possible. Cependant, lorsque cette direction est différente, l'information spectrale semble bien plus difficile à interpréter. On sait cependant que les parties imaginaires du spectre sont associées, indépendamment à la direction, à des variations paires dans le domaine spatial. La partie réelle du spectre est par contre associée à des variations impaires dans le domaine spectral mais aussi à la direction de la transformée. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons au formalisme des algèbres géométriques qui étend un peu plus les possibilités des quaternions pour traiter les images numériques couleurs.

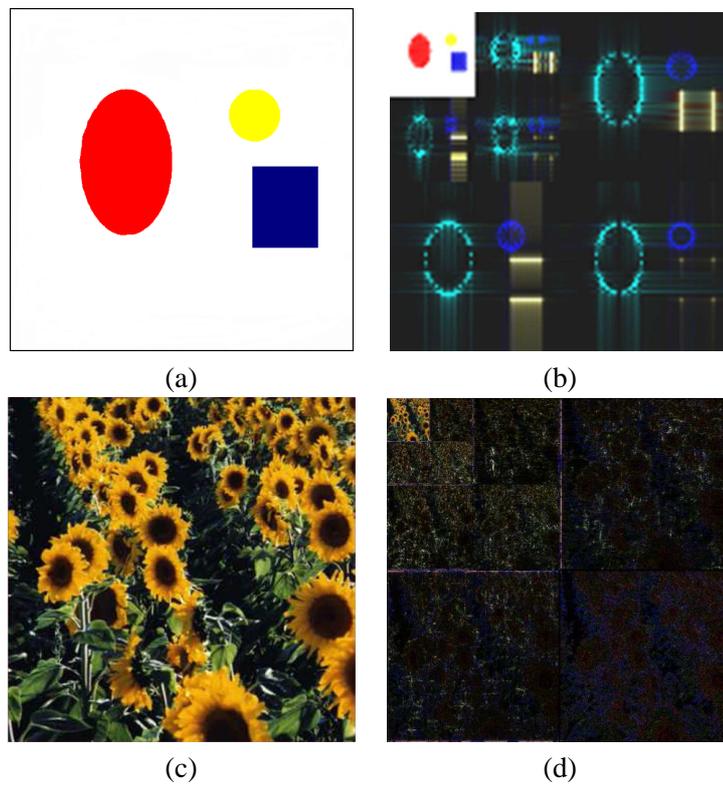


FIG. 3.24 – La décomposition en ondelette : (a) image originale simple ; (b) les coefficients d'ondelettes normalisés pour chaque plan couleur ; (c) image naturelle ; (d) les coefficients d'ondelette normalisés

MODÉLISATION DES COULEURS PAR LES ALGÈBRES GÉOMÉTRIQUES

Les algèbres géométriques permettent la généralisation des quaternions. Elles permettent de plus, de comparer des éléments de l'algèbre appelés multivecteurs par des relations géométriques évoluées définies de manière algébrique. Nous proposons, dans ce chapitre, d'utiliser ce formalisme en l'appliquant aux images numériques couleur avec une caractérisation numérique fréquentielle et des opérations de manipulation des couleurs dans le domaine spatial.

4.1 Algèbres Géométriques

4.1.1 Définition

Une algèbre de Géométrie ou aussi appelé algèbre de Clifford est définie comme solution d'un problème universel dont la donnée de base est un espace vectoriel E (sur \mathbb{R}) de dimension finie n muni d'une forme quadratique Q (voir par exemple le livre de M. Postnikov [58]). Pratiquement, et pour faire simple, en notant $\mathcal{C}(E, Q)$ l'algèbre de Clifford obtenue à partir du couple (E, Q) :

- $\mathcal{C}(E, Q)$ est de dimension 2^n (en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{R}) ;
- E s'injecte dans $\mathcal{C}(E, Q)$ de telle sorte que l'on peut identifier les vecteurs de E à des éléments de $\mathcal{C}(E, Q)$;
- on a pour tout vecteur v de E : $v^2 = Q(v)$ (où v^2 désigne le produit de v par lui même dans $\mathcal{C}(E, Q)$) ;
- une base de $\mathcal{C}(E, Q)$ est donnée par l'ensemble :

$$\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}, i_1 < i_2 < \cdots < i_k, k \in \{1, \dots, n\}\} \quad (4.1)$$

auquel on adjoint $1 = e_0$ (ici (e_1, \dots, e_n) désigne une base de E).

Dans ce qui suit, E sera soit \mathbb{R}_2 soit \mathbb{R}_3 et Q la forme quadratique euclidienne correspondante. Nous noterons \mathcal{G}_2 (resp. \mathcal{G}_3) les algèbres de Clifford associées (notées aussi quelquefois $\mathbb{R}_{2,0}$ et $\mathbb{R}_{3,0}$).

Chacun des éléments de la base d'une algèbre de Clifford est appelé un multivecteur. Cette notion de multivecteurs correspond à l'extension de l'interprétation géométrique que nous nous faisons des vecteurs à une dimension supérieure à 1. En effet, intuitivement, nous associons à un vecteur une flèche qui est une interprétation de ce vecteur. Cette flèche est en fait un segment de droite qui possède une origine, une longueur ainsi qu'une orientation définie par le sens de l'extrémité du vecteur. Une droite est un

sous-espace vectoriel de dimension 1. Lorsqu'on se place dans l'algèbre géométrique \mathcal{G}_n , elle correspond à un *1-vecteur* de l'espace vectoriel \mathcal{G}_n . Les multi-vecteurs sont l'extension de cette interprétation géométrique aux dimensions supérieures de l'espace. Un bivecteur correspondra donc à une portion de plan orientée du fait de ses deux dimensions. De même un trivecteur sera représenté par une portion 3D orientée de l'espace. La figure 4.1 illustre cette notion en montrant une représentation de l'ensemble des multivecteurs composant l'algèbre géométrique \mathcal{G}^3 . Il est possible d'effectuer des opérations géométriques en utilisant les multivecteurs (sous-espaces vectoriels de dimension $k < n$) et en leur appliquant des opérations algébriques. Ceci présente un grand intérêt car on évite ainsi la manipulation des vecteurs par l'utilisation des produits de matrices.

Comme indiqué juste avant, nous n'utiliserons dans cette partie, pour manipuler les images numériques couleur caractérisées par trois composantes, qu'uniquement les algèbres géométriques \mathcal{G}_2 et \mathcal{G}_3 obtenues à partir des espaces vectoriels \mathbb{R}^2 et resp. \mathbb{R}^3 munis de leur base canonique (e_1, e_2) et resp. (e_1, e_2, e_3) , associés à la forme quadratique euclidienne correspondante. Comme nous serons amené à considérer les couleurs dans l'espace couleur *rvb*, le choix de la forme quadratique euclidienne s'impose du fait de la nature euclidienne de l'espace *rvb*.

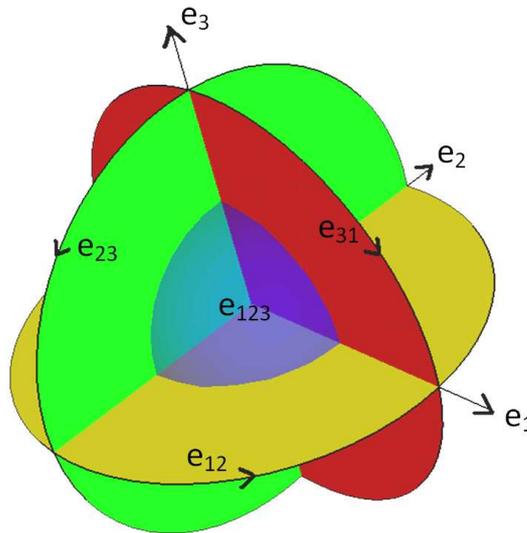


FIG. 4.1 – Les éléments de la base constituant l'algèbre géométrique \mathcal{G}^3 : l'espace est décrit par les vecteurs e_1, e_2 et e_3 , les bivecteurs e_{12}, e_{23} et e_{31} et le trivecteur ou pseudoscalaire e_{123} .

Les algèbres géométriques sont décrites par de nombreux travaux dans la littérature, on pourra se reporter par exemple à [14, 22, 30, 38, 37, 40].

4.1.2 Vocabulaire

- Un *multi-vecteur* est un vecteur de l'algèbre pouvant s'écrire par combinaison linéaire des vecteurs de la base de l'algèbre. On définit de manière générale un multi-vecteur de \mathcal{G}_n par :

$$A = \sum_{k=0}^n \langle A \rangle_k \tag{4.2}$$

avec $\langle A \rangle_k$ la partie *k-vectorielle* de A ou l'opérateur de *grade* k .

Par exemple, on peut donc exprimer un multi-vecteur A quelconque de \mathcal{G}_3 de la manière suivante :

$$A = A_0 e_0 + A_1 e_1 + A_2 e_2 + A_3 e_3 + A_{23} e_{23} + A_{31} e_{31} + A_{12} e_{12} + A_{123} e_{123} \tag{4.3}$$

Suivant les références dans la littérature, e_0 est parfois remplacé par 1.

- On peut donc aussi décomposer le multi-vecteur A suivant ces parties k -vectorielles, par exemple grade 0 de $A : \langle A \rangle_0 = A_0$, ou grade 2 de $A : \langle A \rangle_2 = A_{23}e_{23} + A_{31}e_{31} + A_{12}e_{12}$.
- Un multi-vecteur simple A dans \mathcal{G}_3 est un multi-vecteur pour lequel il existe un et un seul k , $0 \leq k \leq 3$, tel que $\langle A \rangle_k$ est non nul.

4.1.3 Les produits

La manipulation des k -vecteurs se fait par l'utilisation de différents produits. Le premier produit utilisé est le produit géométrique, en prenant $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ les 1-vecteurs formant la base de \mathbb{R}^n on obtient par le produit géométrique, les bivecteurs, les trivecteurs et ainsi de suite jusqu'au n -vecteur ou pseudo-scalaire $e_{123\dots n}$ formant les éléments de la base de l'algèbre \mathcal{G}_n . Ensuite différents autres produits sont définis comme le produit interne et le produit externe qui nous permettront de définir des transformations géométriques dans l'algèbre.

4.1.3.1 Produit Géométrique

Comme nous l'avons dit, le produit géométrique nous sert d'abord à construire les différents éléments de la base de \mathcal{G}_n à partir des 1-vecteurs de la base de \mathbb{R}^n en appliquant la loi d'associativité, de distributivité par rapport à l'addition de \mathcal{G}_n .

On donne dans le tableau 4.1 et tableau 4.2 les différents produits géométriques entre les éléments des bases de \mathcal{G}_2 et \mathcal{G}_3 qui sont les algèbres géométriques que nous utiliserons avec les images numériques.

	1	e₁	e₂	e₁₂
1	1	e_1	e_2	e_{12}
e₁	e_1	1	e_{12}	e_2
e₂	e_2	$-e_{12}$	1	$-e_1$
e₁₂	e_{12}	$-e_2$	e_1	-1

TAB. 4.1 – Produits géométriques des éléments de la base de \mathcal{G}_2

	1	e₁	e₂	e₃	e₂₃	e₃₁	e₁₂	e₁₂₃
1	1	e_1	e_2	e_3	e_{23}	e_{31}	e_{12}	e_{123}
e₁	e_1	1	e_{12}	$-e_{31}$	e_{123}	$-e_3$	e_2	e_{23}
e₂	e_2	$-e_{12}$	1	e_{23}	e_3	e_{123}	$-e_1$	e_{31}
e₃	e_3	e_{31}	$-e_{23}$	1	$-e_2$	e_1	e_{123}	e_{12}
e₂₃	e_{23}	e_{123}	$-e_3$	e_2	-1	$-e_{12}$	e_{31}	$-e_1$
e₃₁	e_{31}	e_3	e_{123}	$-e_1$	e_{12}	-1	e_{23}	$-e_2$
e₁₂	e_{12}	$-e_2$	e_1	e_{123}	$-e_{31}$	e_{23}	-1	$-e_3$
e₁₂₃	e_{123}	e_{23}	e_{31}	e_{12}	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$	-1

TAB. 4.2 – Produits géométriques des éléments de la base de \mathcal{G}_3

On peut maintenant obtenir par combinaison linéaire le produit géométrique de deux multivecteurs quelconques de \mathcal{G}_2 ou \mathcal{G}_3 .

- pour \mathcal{G}_2 il est calculé de la manière suivante avec $A, B \in \mathcal{G}_2$:

$$\begin{aligned}
 AB &= (a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_{12}e_{12})(b_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_{12}e_{12}) \\
 &= (a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 - a_{12}b_{12}) + (a_0b_1 + a_1b_0 - a_2b_{12} + a_{12}b_2)e_1 \\
 &\quad + (a_0b_2 + a_1b_{12} + a_2b_0 - a_{12}b_1)e_2 + (a_0b_{12} + a_1b_2 - a_2b_1 + a_{12}b_0)e_{12}
 \end{aligned}$$

- pour \mathcal{G}_3 on peut le calculer par un produit matriciel suivant avec $A = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 + A_{23}e_{23} + A_{31}e_{31} + A_{12}e_{12} + A_{123}e_{123}$ et $B = B_0e_0 + B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3 + B_{23}e_{23} + B_{31}e_{31} + B_{12}e_{12} + B_{123}e_{123}$ appartenant à \mathcal{G}_3 :

$$AB \equiv \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_{23} & A_{31} & A_{12} & A_{123} \\ A_1 & A_0 & A_{12} & -A_{31} & -A_{123} & A_3 & -A_2 & -A_{23} \\ A_2 & -A_{12} & A_0 & A_{23} & -A_3 & -A_{123} & A_1 & -A_{31} \\ A_3 & A_{31} & -A_{23} & A_0 & A_2 & -A_1 & -A_{123} & -A_{12} \\ A_{23} & A_{123} & -A_3 & A_2 & A_0 & A_{12} & -A_{31} & A_1 \\ A_{31} & A_3 & A_{123} & -A_1 & -A_{12} & A_0 & A_{23} & A_2 \\ A_{12} & -A_2 & A_1 & A_{123} & A_{31} & -A_{23} & A_0 & A_3 \\ A_{123} & A_{23} & A_{31} & A_{12} & A_1 & A_2 & A_3 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_{23} \\ B_{31} \\ B_{12} \\ B_{123} \end{pmatrix}$$

Nous allons donc maintenant nous intéresser aux différents autres produits pouvant être utilisés dans les algèbres géométriques.

4.1.3.2 Produit Externe

Le produit externe, noté \wedge , permet de caractériser les sous-espaces vectoriels générés par une famille libre de vecteurs (non linéairement indépendants). Par exemple en utilisant le produit externe sur deux 1-vecteurs indépendants, on obtient un bivecteur, si de plus on multiplie celui-ci par un autre 1-vecteur indépendant, on obtient un trivecteur représentant par exemple le plus grand sous-espace vectoriel de \mathcal{G}_3 .

On définit le produit externe dans \mathcal{G}_n par rapport au produit géométrique de la manière suivante avec A et $B \in \mathcal{G}_n$:

$$A \wedge B = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n \langle\langle A \rangle_r \langle B \rangle_s \rangle_{r+s} \quad (4.4)$$

La formule donnée ici est très générale mais permet de calculer le produit externe de deux multivecteurs n'ayant pas forcément la même dimension. En effet, le multivecteur A est de grade r là où le multivecteur B est de grade s . On effectue le produit géométrique entre les deux multivecteurs et on garde uniquement les coefficients qui représentent la partie $r + s$ -vectorielle.

Pour donner un exemple, on peut obtenir le produit externe de deux multivecteurs comme $A = A_0e_0 + A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3 + A_{23}e_{23} + A_{31}e_{31} + A_{12}e_{12} + A_{123}e_{123}$ et $B = B_0e_0 + B_1e_1 + B_2e_2 + B_3e_3 + B_{23}e_{23} + B_{31}e_{31} + B_{12}e_{12} + B_{123}e_{123}$ quelconques de \mathcal{G}_3 par le produit matriciel suivant :

$$A \wedge B \equiv \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_2 & 0 & A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & 0 & A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{23} & 0 & -A_3 & A_2 & A_0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_3 & 0 & -A_1 & 0 & A_0 & 0 & 0 \\ A_{12} & -A_2 & A_1 & 0 & 0 & 0 & A_0 & 0 \\ A_{123} & A_{23} & A_{31} & A_{12} & A_1 & A_2 & A_3 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_{23} \\ B_{31} \\ B_{12} \\ B_{123} \end{pmatrix}$$

4.1.3.3 Produit Scalaire

Le produit scalaire, noté \cdot , est souvent utilisé pour donner une notion de distance ou de norme (cf. 4.1.5.2) aux multivecteurs, il se définit par la partie scalaire du produit géométrique avec $A, B \in \mathcal{G}_n$:

$$A \cdot B = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n \langle\langle A \rangle_r \langle B \rangle_s \rangle_0 \quad (4.5)$$

4.1.4 Propriété du produit géométrique

Une propriété remarquable du produit géométrique est que pour deux 1-vecteurs x et y de \mathbb{R}^n , le produit géométrique se décompose à l'aide des produits scalaire et externe que nous venons de définir :

$$xy = x.y + x \wedge y \quad (4.6)$$

Lorsque x et y sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul. Il ne reste plus que leur produit externe, or les éléments $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ de la base de \mathbb{R}^n sont par définition tous orthogonaux entre eux. On obtient donc, en les multipliant, les bi-vecteurs de \mathcal{G}_n . Les trivecteurs $e_{123}, e_{124}, e_{(n-3)(n-2)(n-1)}, \dots$ sont le résultat des produits géométriques d'un 1-vecteur de la base avec un bivecteur orthogonal. On construit ensuite les 4-vecteurs de la base et ainsi de suite jusqu'au n -vecteur de la base qui est unique et aussi appelé pseudoscalaire. La base complète de \mathcal{G}_n est constituée de 2^n multivecteurs.

4.1.4.1 Produit Interne

Pour le produit interne, on utilise la *Contraction à gauche* notée \rfloor , cette notion permet de généraliser la notion d'orthogonalité définie par le produit scalaire canonique de deux vecteurs de \mathbb{R}^n à deux k -vecteurs, sous-espaces vectoriels de \mathcal{G}_n . Si les deux k -vecteurs sont orthogonaux, leur produit interne est nul. Il se définit à partir du produit géométrique avec $A, B \in \mathcal{G}_n$:

$$A \rfloor B = \sum_{r=0}^n \sum_{s=0}^n \langle \langle A \rangle_r \langle B \rangle_s \rangle_{s-r} \quad (4.7)$$

Encore une fois avec des multivecteurs A et $B \in \mathcal{G}_3$ on peut obtenir le produit interne par le produit matriciel suivant :

$$A \rfloor B \equiv \begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_{23} & A_{31} & A_{12} & A_{123} \\ 0 & A_0 & 0 & 0 & 0 & A_3 & -A_2 & -A_{23} \\ 0 & 0 & A_0 & 0 & -A_3 & 0 & A_1 & -A_{31} \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_2 & -A_1 & 0 & -A_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_{23} \\ B_{31} \\ B_{12} \\ B_{123} \end{pmatrix}$$

Soient $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ et $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ deux 1-vecteurs de \mathcal{G}_3 , dans ce cas, le produit interne est égal au produit scalaire et vaut :

$$u.v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (4.8)$$

4.1.5 Notions Complémentaires

4.1.5.1 Réversion

La réversion est une notion qui servira pour définir notamment l'inverse et aussi la norme. Soit le multi-vecteur quelconque $A = \sum_{k=0}^n \langle A \rangle_k$ de \mathcal{G}_n , sa *réversion* \tilde{A} est définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \sum_{k=0}^n \widetilde{\langle A \rangle_k} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \langle A \rangle_k \end{aligned} \quad (4.9)$$

La réversion vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\widetilde{AB} &= \widetilde{B}\widetilde{A} \\ \widetilde{A+B} &= \widetilde{A} + \widetilde{B}\end{aligned}\tag{4.10}$$

De (4.9) on déduit que la réversion d'un multivecteur M de \mathcal{G}^2 vaut :

$$\widetilde{M}_{\mathcal{G}^2} = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2\tag{4.11}$$

et celle d'un multivecteur M de \mathcal{G}^3 vaut :

$$\widetilde{M}_{\mathcal{G}^3} = \langle M \rangle_0 + \langle M \rangle_1 - \langle M \rangle_2 - \langle M \rangle_3\tag{4.12}$$

La notion de réversion correspond à l'équivalent de la notion de conjugaison que nous connaissons pour les nombres complexes et que nous avons vu avec les quaternions en 3.1.4. En effet, nous l'illustrons au travers de la définition de la norme.

4.1.5.2 Norme

La *norme* de $A \in \mathcal{G}_n$ est définie par le produit scalaire de A par rapport à sa réversion :

$$|A| = A \cdot \widetilde{A} = \sqrt{\langle A\widetilde{A} \rangle_0}\tag{4.13}$$

Donc pour un multivecteur A de \mathcal{G}^2 la norme est donnée par :

$$|A| = \sqrt{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_{12}^2}\tag{4.14}$$

Nous voyons donc ici qu'il existe une correspondance entre la réversion d'un multivecteur et la conjugaison complexe ou quaternionique qui permettent également de définir la norme pour ces deux autres algèbres. En effet si $z \in \mathbb{C}$ alors $|z|^2 = z\bar{z}$ et si $q \in \mathbb{H}$ alors $|q|^2 = q\bar{q}$.

4.1.5.3 Inverse

Le produit géométrique est inversible, c'est à dire que pour tout multi-vecteur X de \mathcal{G}_n , il existe un unique multi-vecteur X^{-1} de \mathcal{G}_n tel que $XX^{-1} = 1$, avec 1 le scalaire unité de \mathcal{G}^n . Certains éléments de \mathcal{G}^n appelés *verseurs* sont inversibles facilement, il s'agit de ceux pouvant s'exprimer comme un produit de 1-vecteurs. Cependant tout multivecteur de \mathcal{G}^n ne s'exprimera pas avec un tel produit. Par exemple la somme d'un scalaire et d'un vecteur est un multivecteur mais n'est pas exprimable sous forme de produit de vecteurs. Grâce à la réversion on peut calculer l'inverse d'un *verseur* de \mathcal{G}^n :

$$X^{-1} = \frac{\widetilde{X}}{X\widetilde{X}}\tag{4.15}$$

Pour illustrer, si on prend u un 1-vecteur de \mathcal{G}_3 alors $u\widetilde{u}$ est un scalaire :

$$u\widetilde{u} = (u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\tag{4.16}$$

on obtient donc u^{-1} le 1-vecteur de \mathcal{G}_3 inverse de u par :

$$u^{-1} = \frac{\widetilde{u}}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \frac{u}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \frac{u}{|u|^2}\tag{4.17}$$

4.1.5.4 Dualité

La dualité définit une notion d'espace orthogonal : pour un sous-espace \mathcal{F} d'un espace vectoriel \mathcal{E} , il existe un sous-espace \mathcal{F}^\perp de \mathcal{E} qui est orthogonal à \mathcal{F} vérifiant la relation suivante : $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp = \mathcal{E}$.

On définit, avec $I_n = e_{123\dots n}$ le pseudoscalaire, le *dual* A^* d'un multi-vecteur simple $A \in \mathcal{G}_n$ qui lui est donc orthogonal par :

$$A^* = A \rfloor \widetilde{I}_n = -AI_n \quad (4.18)$$

Le dual d'un 1-vecteur $u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$ de \mathcal{G}_3 est donc :

$$\begin{aligned} u^* &= u \rfloor \widetilde{e}_{123} \\ &= -ue_{123} = -(u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3)e_{123} \\ &= -u_1e_{23} - u_2e_{31} - u_3e_{12} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Un autre exemple : le dual d'un bivecteur formé par deux 1-vecteurs a et b dans \mathcal{G}^3 est le 1-vecteur B^* produit mixte de $a \times b$ (*règle d'orthogonalité des trois doigts de la main droite*) (cf. figure 4.2).

$$(a \wedge b)^* = a \times b \quad (4.20)$$

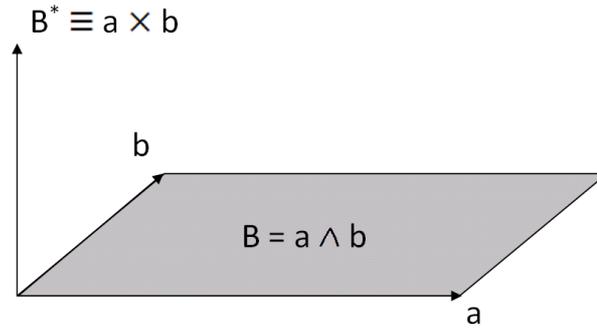


FIG. 4.2 – le 1-vecteur B^* est le dual du bivecteur $B = a \wedge b$ dans \mathcal{G}^3 .

4.1.5.5 Propriétés remarquables pour des 1-vecteurs

Par la suite, nous verrons que nous avons choisi de coder les informations couleur sur des 1-vecteurs de l'algèbre \mathcal{G}_3 . Nous désirons donc mettre ici en évidence des propriétés sur les produits de 1-vecteurs. Pour deux 1-vecteurs de \mathcal{G}_n nous avons la relation suivante : $ab = a \rfloor b + a \wedge b$. Le produit interne $a \rfloor b$ (resp. externe $a \wedge b$) est donc la partie symétrique (resp. antisymétrique) du produit géométrique ab et peut s'écrire :

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \frac{1}{2}(ab - ba) \\ a \rfloor b &= \frac{1}{2}(ab + ba) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nous ajoutons ici quelques propriétés qui facilitent souvent les calculs effectués avec des 1-vecteurs dans \mathcal{G}_n .

Soit a un 1-vecteur de \mathcal{G}_n , on a alors :

- $\widetilde{a} = a$;
- $|a| = \sqrt{\langle a\widetilde{a} \rangle_0} = \sqrt{a^2}$;
- $a\widetilde{a} = aa = a^2 = |a|^2$;
- $a^{-1} = \frac{\widetilde{a}}{a\widetilde{a}} = \frac{a}{aa} = \frac{a}{|a|^2}$;
- $aa^{-1} = a \frac{a}{|a|^2} = \frac{|a|^2}{|a|^2} = 1$.

4.1.6 Transformations géométriques

Comme leur nom le suggère, les algèbres géométriques permettent de définir des transformations géométriques en utilisant le formalisme des notations algébriques. La figure 4.3 indique des exemples de transformations du plan définies à partir de 1-vecteurs dans l'algèbre \mathcal{G}_2 ou \mathcal{G}_3 .

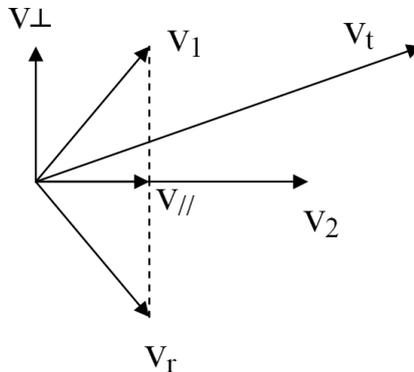


FIG. 4.3 – On définit les transformations géométriques de base à partir de deux 1-vecteurs v_1 et v_2 de \mathcal{G}_2 ou \mathcal{G}_3 : v_t est la translation du vecteur v_1 par v_2 ; $v_{||}$ est la projection de v_1 sur v_2 ; v_{\perp} est la réjection de v_1 par rapport à v_2 et v_r est la réflexion de v_1 par rapport à v_2

4.1.6.1 Translation

Soient v_1, v_2 et v_t des 1-vecteurs de \mathcal{G}_2 ou \mathcal{G}_3 , la translation v_t de v_1 par v_2 est donnée par leur somme :

$$v_t = v_1 + v_2 \quad (4.22)$$

4.1.6.2 Projection

Soient v_1, v_2 et $v_{||}$ des 1-vecteurs de \mathcal{G}_2 ou \mathcal{G}_3 , la projection $v_{||}$ (ou bien $v_{||}^{v_2}$) de v_1 sur v_2 est donnée par :

$$v_{||} = (v_1 | v_2) v_2^{-1} \quad (4.23)$$

4.1.6.3 Réjection

Soient v_1, v_2 et v_{\perp} des 1-vecteurs de \mathcal{G}_2 ou \mathcal{G}_3 , la réjection v_{\perp} (ou bien $v_{\perp}^{v_2}$) de v_1 par rapport à v_2 est donnée par :

$$v_{\perp} = (v_1 \wedge v_2) v_2^{-1} \quad (4.24)$$

4.1.6.4 Réflexion

Soient v_1, v_2 et v_r des 1-vecteurs de \mathcal{G}_2 ou \mathcal{G}_3 , la réflexion v_r (ou bien $v_r^{v_2}$) de v_1 par rapport à v_2 est donnée par :

$$\begin{aligned} v_r &= (v_1 | v_2) v_2^{-1} - (v_1 \wedge v_2) v_2^{-1} \\ &= v_2 v_1 v_2^{-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

4.1.7 Notation exponentielle et rotation

Il est possible d'utiliser la notation exponentielle avec des bivecteurs. L'introduction du concept d'exponentielle est issue du fait que l'ensemble des bivecteurs ajouté aux scalaires représente une sous-algèbre isomorphe à l'algèbre des quaternions elle-même isomorphe à celle des complexes. Cette notation comprend donc une partie scalaire et une partie bi-vectorielle (J étant un bivecteur unitaire).

$$e^{J\theta} = \underbrace{\cos \theta}_{\text{scalaire}} + \underbrace{\sin \theta J}_{\text{bivecteur}} \tag{4.26}$$

La notation exponentielle est donc généralisée et nous permet par exemple de représenter les rotations.

L'opération de rotation est souvent exprimée au moyen d'un axe et d'un angle. Cependant on peut aussi voir la rotation comme une composition de deux réflexions d'axe. On ne peut d'ailleurs exprimer les rotations que par ce moyen lorsque l'on travaille dans le plan par exemple. Dans la figure 4.4 on illustre cette composition de réflexions avec le 1-vecteur m'' qui est le résultat de la réflexion du 1-vecteur m' d'axe Δ_2 lui-même résultat de la réflexion du 1-vecteur m d'axe Δ_1 . Le 1-vecteur m'' représente ainsi le résultat de la rotation du 1-vecteur m d'angle θ dans le plan porté par le bivecteur unitaire $J = \frac{d_1 \wedge d_2}{|d_1 \wedge d_2|} = \frac{d_1 \wedge d_2}{\sin(\frac{\theta}{2})}$. On peut aussi dire que m'' est le résultat de la rotation d'axe Δ et d'angle θ . L'axe Δ porté par le 1-vecteur unitaire d est orthogonal au bivecteur unitaire J , formé par les deux axes de réflexion Δ_1 et Δ_2 , portés par les 1-vecteurs d_1 et d_2 respectivement. On exprimera donc la rotation sur le plan porté par le bivecteur J et d'angle θ de la manière suivante (l'angle $\widehat{\Delta_1 \Delta_2}$ étant de $\frac{\theta}{2}$) :

$$\begin{aligned} m'' = m_{rot} &= d_2 d_1 m d_1^{-1} d_2^{-1} \\ &= e^{-J\frac{\theta}{2}} m e^{J\frac{\theta}{2}} \end{aligned} \tag{4.27}$$

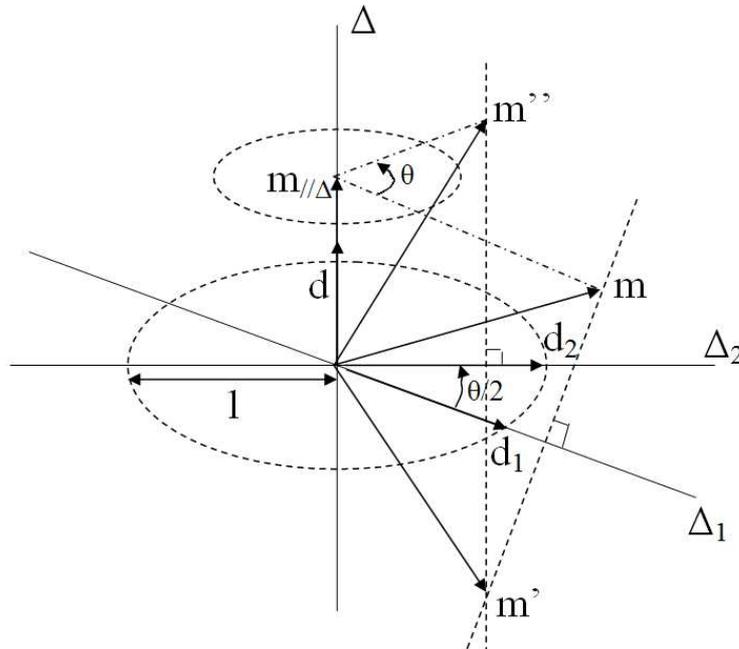


FIG. 4.4 – Rotations : m' est le résultat de la réflexion d'axe Δ_1 ; m'' est le résultat de la réflexion d'axe Δ_2 ; m'' est aussi le résultat de la rotation d'angle θ (deux fois l'angle entre les axes Δ_1 et Δ_2) de m autour de l'axe Δ mais aussi autour du bivecteur normalisé $J = \frac{d_1 \wedge d_2}{|d_1 \wedge d_2|}$

4.1.8 Comparaison de deux 1-vecteurs par le produit géométrique

Soient deux 1-vecteurs a et b de \mathcal{G}_2 ou \mathcal{G}_3 , nous voulons les comparer en utilisant des outils empruntés de l'algèbre géométrique. Comme nous l'avons vu, le produit géométrique contient les produits interne et externe entre les deux vecteurs a et b , en effet $ab = a \rfloor b + a \wedge b$. Les transformations de base de la partie précédente sont décrites en utilisant ces deux produits, nous pourrions donc probablement comparer efficacement les deux vecteurs en utilisant le produit géométrique.

Pour cela, nous observons tout d'abord les propriétés suivantes :

- Si $a \parallel b$ alors $a \wedge b = 0$ donc $ab = a \rfloor b$.
- Si $a \perp b$ alors $a \cdot b = a \rfloor b = 0$ donc $ab = a \wedge b$.

En général, l'angle entre a et b n'est ni nul ni droit, il sera noté α . Développons maintenant le produit géométrique de a par b :

$$\begin{aligned} ab &= a \rfloor b + a \wedge b \\ &= (a \rfloor b)b^{-1}b + (a \wedge b)b^{-1}b \\ &= [(a \rfloor b)b^{-1}]b + [(a \wedge b)b^{-1}]b \end{aligned} \tag{4.28}$$

Des relations (4.23) et (4.24) on a donc $ab = a_{\parallel}^b b + a_{\perp}^b b$.

On a donc $a_{\parallel}^b b = a \rfloor b$ une partie scalaire et $a_{\perp}^b b = a \wedge b$ une partie bivectorielle. Nous proposons donc d'exprimer ab par l'intermédiaire d'une notation exponentielle comprenant l'angle α entre les deux vecteurs a et b .

Comme on utilise le produit géométrique sur des 1-vecteurs, le produit interne est équivalent au produit scalaire. On utilise donc la géométrie vectorielle afin d'exprimer la partie scalaire. On a donc :

$$a \rfloor b = a \cdot b = |a||b| \cos \alpha \tag{4.29}$$

Il nous faut maintenant exprimer la partie bivectorielle en fonction de l'angle α . Pour cela nous exprimons la norme du bivecteur $a \wedge b$:

$$\begin{aligned} |a \wedge b| &= |a_{\perp}^b b| \\ &= |a_{\perp}^b||b| \text{ (car } a_{\perp}^b \text{ et } b \text{ sont orthogonaux)} \\ &= |a| \sin \alpha |b| \end{aligned} \tag{4.30}$$

On remarquera que la norme du bivecteur est égale à la norme définie en géométrie vectorielle du produit vectoriel de deux vecteurs.

On a donc :

$$\frac{|a \wedge b|}{|a \wedge b|} a \wedge b = |a||b| \sin \alpha \frac{a \wedge b}{|a \wedge b|} \tag{4.31}$$

Si on ajoute (4.29) et (4.31) et que l'on pose $J = \frac{a \wedge b}{|a \wedge b|}$, avec $|J| = 1$, on retrouve le produit géométrique ab sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned} ab &= a \rfloor b + a \wedge b \\ &= \cos \alpha |a||b| + |a||b| \sin \alpha J \\ &= |a||b| (\cos \alpha + \sin \alpha J) \\ &= |a||b| \exp^{\alpha J} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Comme J est le bivecteur unitaire formé par le produit externe de a par b , il représente une portion du plan dans lequel les deux 1-vecteurs sont présents. Nous venons donc de montrer qu'il est possible de comparer deux 1-vecteurs simplement en calculant leur produit géométrique. Notre approche a montré que ce produit géométrique s'exprime alors sous forme exponentielle et met en valeur l'angle entre ces deux 1-vecteurs dans le plan formé par eux. On utilisera cette relation lors du traitement des images couleur.

On remarque également que le produit ab permet de décrire la moitié de l'opération de rotation d'angle 2α sur le plan porté par J . Ainsi pour effectuer une rotation sur le 1-vecteur m de 2α sur le plan porté par J on effectuera l'opération suivante : $abm(ba)^{-1}$.

4.1.9 Quaternions et algèbres géométriques

L'algèbre des quaternions \mathbb{H} est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{R}_{0,2}$ de l'espace vectoriel \mathbb{R}^2 muni de la forme quadratique

$$Q(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \quad (4.33)$$

En effet, soit (e_1, e_2) une base orthogonale de \mathbb{R}^2 telle que $Q(e_1) = Q(e_2) = e_1^2 = e_2^2 = -1$, on réalise un isomorphisme entre $\mathbb{R}_{0,2}$ et \mathbb{H} en envoyant e_1 sur i , e_2 sur j et e_1e_2 sur k (et évidemment $1 = e_0$ sur 1). Par ailleurs l'algèbre \mathbb{H} s'identifie également à la sous-algèbre de \mathcal{G}_3 constituée des éléments pairs de cette dernière. Un élément de \mathcal{G}_3 est dit pair s'il est combinaison linéaire de scalaires et de bivecteurs. L'identification évoquée est donnée par

$$1 \mapsto e_0, i \mapsto e_2 \wedge e_3, j \mapsto e_1 \wedge e_3, k \mapsto e_1 \wedge e_2 \quad (4.34)$$

Mentionnons enfin le fait important suivant : le groupe des quaternions unitaires \mathbb{S} est isomorphe au groupe $Spin(3)$ des spineurs de l'algèbre \mathcal{G}_3 . Formellement $Spin(3)$ est défini comme le groupe des éléments pairs x de \mathcal{G}_3 de norme 1 vérifiant la condition suivante :

$$\forall v \in \mathbb{R}_3, xv x^{-1} \in \mathbb{R}_3 \quad (4.35)$$

Il s'avère (puisque l'on est en dimension 3) que cette dernière condition est automatiquement satisfaite, d'où l'affirmation précédente. Le groupe $Spin(3)$ est intimement lié au groupe $\mathcal{SO}(3)$ des transformations linéaires de \mathbb{R}_3 de déterminant 1 qui préservent la forme quadratique euclidienne. Plus précisément, l'application

$$\varphi : Spin(3) \longrightarrow \mathcal{SO}(3)$$

définie par

$$x \mapsto (v \mapsto xv x^{-1}) \quad (4.36)$$

est un morphisme de groupes surjectif qui est 2 : 1 autrement dit, l'ensemble $\varphi^{-1}(\{\varphi(x)\})$ est constitué des deux éléments x et $-x$ (cf. figure 4.5).

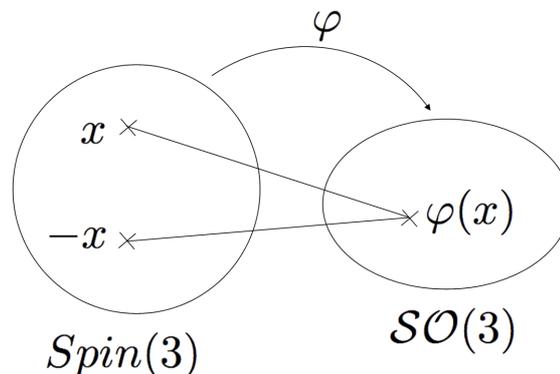


FIG. 4.5 – Tout élément $x \in Spin(3)$ a une image $\varphi(x)$ dans $\mathcal{SO}(3)$. De plus, $\varphi(x)$ possède également un autre antécédent à savoir $-x$.

Nous allons maintenant étudier comment nous pouvons utiliser ce formalisme pour l'analyse d'images couleur. Mais tout d'abord nous faisons un bref rappel des premiers travaux à notre connaissance liant traitement d'image et algèbre géométrique.

4.2 Approche fréquentielle par algèbres géométriques pour les images en niveaux de gris

Dans son mémoire de thèse, Felsberg [30] généralise les travaux sur les quaternions de Bülow [8] sur l'étude des signaux 2D appliqués aux images en niveaux de gris. Pour cela il redéfinit tout d'abord le signal analytique qui s'applique aux signaux 1D et ensuite le signal monogétique, généralisation du signal analytique aux signaux 2D, en utilisant les formalismes des algèbres géométriques \mathcal{G}_2 et \mathcal{G}_3 .

Pour un signal 1D la transformée de Fourier définie par Felsberg est la suivante :

$$F(\mathbf{u}) = \mathcal{F}_1\{f\}(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp^{-e_{12}2\pi\mathbf{x}\mathbf{u}} f(\mathbf{x})dx \quad (4.37)$$

Avec $\mathbf{x} = xe_1$ et $\mathbf{u} = ue_1$.

Comme $e_{12}^2 = -1$, cette transformée de Fourier est isomorphe à une transformée de Fourier complexe, cependant il faut faire attention car le produit géométrique n'est pas commutatif, donc l'exponentielle doit être conservée sur la gauche. La transformée de Fourier inverse est obtenue en changeant uniquement le signe dans l'exponentielle. Comme cette transformée de Fourier est isomorphe à la transformée de Fourier complexe, elle permet de mettre en évidence les symétries hermitiennes. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} F^p(\mathbf{u}) &= \frac{F(\mathbf{u}) + F(-\mathbf{u})}{2} = \int_{x=-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \cos(2\pi\mathbf{x})dx \\ F^i(\mathbf{u}) &= \frac{-e_{12}(F(\mathbf{u}) - F(-\mathbf{u}))}{2} = - \int_{x=-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \sin(2\pi\mathbf{x})dx \end{aligned} \quad (4.38)$$

On obtient donc $F = F_p + e_{12}F_i$ avec F_p la partie paire et F_i la partie impaire de la fonction F ce qui traduit que cette transformée de Fourier est directement liée à l'analyse complexe. En effet il suffit de remplacer e_{12} par i pour retrouver cette analyse.

Felsberg considère les signaux 2D comme des surfaces dans des espaces en 3 dimensions, en effet il considère de tels signaux avec l'écriture suivante :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(xe_1 + ye_2) = f(x, y)e_3 \quad (4.39)$$

A partir de cette écriture, il définit pour un signal 2D la transformée de Fourier comme suit :

$$\mathcal{F}_2\{f\}(\mathbf{u}) = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \exp^{-e_{123}2\pi\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}} dx dy \quad (4.40)$$

Cette définition résulte sur une transformée de Fourier qui ressemble plus à la transformée de Fourier complexe qu'à la transformée de Fourier quaternionique car le noyau comprend le pseudoscalaire qui commute e_{123} par définition avec tous les éléments de l'algèbre. D'ailleurs cette transformée de Fourier ainsi définie est en effet isomorphe à la transformée de Fourier complexe.

Selon Felsberg, cette transformée de Fourier peut se séparer en parties paires et impaires :

$$\begin{aligned} F^p(\mathbf{u}) &= \frac{F(\mathbf{u}) + F(-\mathbf{u})}{2} = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \cos(2\pi\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}) dx dy \\ F^i(\mathbf{u}) &= \frac{(F(\mathbf{u}) - F(-\mathbf{u}))^*}{2} = - \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \sin(2\pi\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}) dx dy \end{aligned} \quad (4.41)$$

Et il suit que $F = F_p + F_i e_{123}$ avec F_p la partie paire et F_i la partie impaire de la fonction F .

Felsberg fait alors remarquer que la définition des fonctions paires et impaires est le principe fondamental car le reste de l'analyse qui en résulte en dépend. En effet, tandis que la définition de symétrie est unique dans le cas 1D, il y a au moins deux façons de définir des symétries en 2D. Ainsi on peut définir une symétrie sur les lignes, mais il est également possible de définir une symétrie sur les points. La transformée de Fourier quaternionique définie par Bülow utilise le principe de la symétrie par lignes

car les structures 2D sont analysées plus en détail sur les directions associées aux variations suivant l'axe horizontal et l'axe vertical. Dans son approche Felsberg définit quand à lui une analyse des structures 2D en se basant sur des symétries centrales, autrement dit, des symétries sur des points.

Nous allons maintenant proposer et étudier différentes approches utilisant les algèbres géométriques pour analyser les images couleur.

4.3 Approche fréquentielle par algèbres géométriques pour les images couleur

4.3.1 \mathcal{G}_2 et Images Couleur

Il est possible d'utiliser \mathcal{G}_2 pour coder l'information couleur d'une image numérique. Par exemple si on code l'information d'une image couleur par une fonction f à deux variables $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ alors au point de coordonnées (x, y) la fonction f est égale à : $f(x, y) = r(x, y)e_0 + v(x, y)e_1 + b(x, y)e_2$ où les fonctions r, v et b correspondent à chacune des composantes rouge, verte et bleue de l'image.

Nous faisons remarquer au lecteur que le choix de cet encodage de l'information couleur sur l'algèbre \mathcal{G}_2 , interdit l'utilisation des transformations géométriques couleur que nous définirons plus tard sur les vecteurs couleur 3D grâce à l'algèbre géométrique \mathcal{G}_3 . En effet, ces opérations, comme les projections, les rotations, les réjections ainsi que les translations ne sont définies dans les algèbres géométriques que pour des multivecteurs simples, c'est à dire s'exprimant sur un grade unique de l'algèbre. Le choix effectué ici code l'information rouge sur le grade 0 et les informations verte et bleue sur le grade 1 de l'algèbre et empêche donc l'utilisation de telles transformations. L'utilisation de \mathcal{G}_2 n'est donc ici faite que pour proposer de caractériser des propriétés fréquentielles obtenues par transformée de Fourier. Pour cela nous proposons de suivre le travail de Brackx et al. [6, 7].

4.3.1.1 Transformée de Fourier Cliffordienne utilisant \mathcal{G}_2

On parle ici de transformée de Fourier Cliffordienne mais il serait équivalent de parler de transformée de Fourier par algèbres géométriques.

Definition On définit la Transformée de Fourier Cliffordienne Continue 2D (TFCC2D) sur des vecteurs de \mathbb{R}_n en se basant sur [6, 7] par¹ :

$$F(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}_2} \exp(2\pi(\mathbf{u} \wedge \mathbf{x})) f(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad (4.42)$$

avec \mathbf{u} la composante fréquentielle et \mathbf{x} la composante spatiale.

Si on choisit de travailler en 2D on choisira les vecteurs $\mathbf{u} = (u, v)$ et $\mathbf{x} = (x, y)$. L'exponentielle du produit externe 2D s'exprime par $\exp^{\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}} = \cos(uy - vx) + \sin(uy - vx)e_{12}$ et est constituée d'une partie scalaire et d'une partie bivectorielle, on dit alors qu'il est parabivectoriel.

L'équation devient alors :

$$F(u, v) = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f](u, v) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \exp(2\pi(uy - vx)e_{12}) f(x, y) dx dy \quad (4.43)$$

On remarque dans cette définition, contrairement à toutes les définitions de transformée de Fourier vues précédemment, que le noyau de la transformée vaut $\exp^{2\pi(\mathbf{u} \wedge \mathbf{x})} = \exp^{2\pi(uy - vx)e_{12}}$ et s'interprète différemment. En effet, les transformées que nous utilisions auparavant étaient basées sur le produit scalaire $\exp^{2\pi(ux + vy)e_{12}} = \exp^{2\pi(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})e_{12}}$ et non sur le produit extérieur comme ici. La différence est qu'ici le noyau de la transformée s'exprime au moyen d'une valeur appartenant à l'algèbre géométrique. L'analyse d'une image devant s'effectuer dans le plan, on utilise le produit extérieur des dimensions fréquentielle \mathbf{u} et spatiale \mathbf{x} . On obtient un bivecteur qui représente une portion du plan d'analyse. C'est

¹On rappelle qu'une lettre minuscule de police grasse sert à représenter des 1-vecteurs de l'algèbre

ce bivecteur qui est associé au noyau exponentiel de la transformée de Fourier Cliffordienne et donc l'analyse sera associée à la notion de plan défini par les 1-vecteurs participant à la construction de ce bivecteur.

Maintenant si l'on pose le problème des images numériques, la transformée a besoin d'être discrétisée. On considère donc une matrice de dimension $M \times N$ et un pas d'échantillonnage de 1 dans le domaine spatial.

On aura donc :

- $x = m$ avec $m = 0 \dots M - 1$
- $y = n$ avec $n = 0 \dots N - 1$
- $u = \frac{o}{M}$ avec $o = 0 \dots M - 1$
- $v = \frac{p}{N}$ avec $p = 0 \dots N - 1$

On obtient alors la transformée de Fourier Cliffordienne discrète (TFCD) comme suit :

$$F[o, p] = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f][o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2\pi(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N})e_{12}) f[m, n] \quad (4.44)$$

La transformée inverse est donnée par :

$$f[m, n] = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}[F][m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=0}^{M-1} \sum_{p=0}^{N-1} \exp(-2\pi(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N})e_{12}) F[o, p] \quad (4.45)$$

Puisque nous avons la propriété suivante : $\exp^{ae_{12}}\exp^{-ae_{12}} = \exp^0 = 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, la transformée donc est inversible sans condition. On remarquera également que cette transformation est calculable au moyen de transformées de Fourier rapides (cf. annexe A.1).

4.3.1.2 Définition numérique de l'espace spectral

En appliquant la définition de la transformée de Fourier Cliffordienne précédente nous souhaitons savoir si nous pouvons effectuer une analyse de la couleur. Pour cela nous étudions la caractérisation numérique du spectre correspondant.

Condition d'initialisation A partir de la formulation de la transformée de Fourier \mathcal{G}_2 (cf. équation 4.45), nous pouvons déduire les conditions nécessaires pour initialiser le spectre obtenu par la transformée de Fourier \mathcal{G}_2 inverse afin d'obtenir une image couleur définie sur la partie scalaire et les deux parties vectorielles. Ce calcul (cf. annexe A.2) est équivalent aux précédents que nous avons effectués avec le formalisme des quaternions (cf. section 3.5.1.2).

Nous obtenons donc les conditions générales de symétries du spectre pour pouvoir reconstruire le signal d'une image couleur par notre transformée de Fourier inverse dans \mathcal{G}_2 avec $\forall(o, p) \in ([-\frac{M}{2} + 1; \frac{M}{2}], [-\frac{N}{2} + 1; \frac{N}{2}])$:

$$\begin{aligned} & F_1 \text{ et } F_2 \text{ quelconques} \\ F_0[k, l] &= F_0[-k, -l] \\ F_{12}[k, l] &= -F_{12}[-k, -l] \end{aligned} \quad (4.46)$$

Il apparaît donc que la partie réelle du spectre est paire alors que la partie bivectorielle est impaire. Le calcul montre cependant que la partie vectorielle (en e_1 et e_2) ne présente pas de symétrie particulière.

Influence d'un Dirac De la même façon que pour les quaternions, section 3.5.2.3, nous proposons d'analyser les atomes élémentaires par l'initialisation d'un Dirac (une constante), en respectant les conditions d'initialisation données dans l'équation (4.46), sur le spectre d'une image couleur. Le détail des calculs est donné à l'annexe A.3.

- On initialise la composante scalaire avec $F_0[k_0, l_0] = F_0[-k_0, -l_0]$, la variation obtenue dans le domaine spatial est paire et décrite par :

$$f[m, n] = 2F_0[o_0, p_0] \cos\left(2\pi\left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N}\right)\right) \quad (4.47)$$

- On initialise la composante bivectorielle avec deux Dirac : $F_{12}[k_0, l_0] = -F_{12}[-k_0, -l_0]$. On obtient une variation impaire dans le domaine spatial :

$$f[m, n] = -2F_{12}[o_0, p_0] \sin\left(2\pi\left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N}\right)\right) \quad (4.48)$$

Dans ces deux cas on obtiendra une variation décrite uniquement sur e_0 la composante scalaire associée dans notre cas à la composante rouge.

- Initialisation sur une composante vectorielle

Il n'existe pas de condition de symétrie sur la partie vectorielle du spectre de notre transformée.

Quelle est donc l'influence d'une initialisation sur l'une ou l'autre de ces deux composantes ?

- on initialise la première partie vectorielle avec un dirac aux coordonnées (o_0, p_0) :

$$f[m, n] = \left[F_1[o_0, p_0] \cos\left(2\pi\left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N}\right)\right) \right] e_1 + \left[-F_1[o_0, p_0] \sin\left(2\pi\left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N}\right)\right) \right] e_2 \quad (4.49)$$

- on initialise la deuxième composante vectorielle avec un dirac aux coordonnées (o_0, p_0) :

$$f[m, n] = \left[F_2[o_0, p_0] \sin\left(2\pi\left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N}\right)\right) \right] e_1 + \left[F_2[o_0, p_0] \cos\left(2\pi\left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N}\right)\right) \right] e_2 \quad (4.50)$$

Alors que l'initialisation sur la première composante vectorielle du spectre induit une variation spatiale paire sur la première composante et une variation impaire sur la seconde, l'initialisation fréquentielle sur la seconde composante vectorielle induit une variation spatiale impaire sur la première composante et une variation paire sur la seconde. Les informations sont donc mélangées sur les parties vectorielles du spectre puisqu'on exprime f_1 en fonction de F_1 et F_2 et que la même chose est vraie f_2 . Bien sûr, cela s'explique entre autre par le fait que l'on ne force pas de symétrie sur le spectre pour ces deux composantes donc le mélange de celles-ci ne s'annule pas dans le domaine spatial.

On remarque donc que le spectre n'agit pas de manière équivalente pour chacune des composantes couleur. Tout d'abord les parties scalaires et bivectorielles sont uniquement réservées à la description des variations de la composante rouge et ensuite les parties vectorielles décrivent les variations pour les composantes verte et bleue. De plus, on peut séparer les variations paires de la composante rouge sur la partie scalaire du spectre tandis que les variations impaires seront décrites par la partie bivectorielle du spectre. Par contre, du fait qu'il n'existe pas de symétrie sur la partie vectorielle du spectre, les variations paires de la composante verte seront mélangées avec les variations impaires de la composante bleue sur la première partie vectorielle du spectre alors que ce sera l'inverse sur la seconde partie vectorielle. Ceci confirme les réserves émises concernant le mélange des parties scalaire et vectorielle. Il ne nous semble donc pas pertinent d'associer la couleur à l'analyse spectrale fournie par cette transformée de Fourier car les informations de couleur ne se retrouvent pas séparées sur des composantes indépendantes du spectre.

4.3.1.3 Filtrage fréquentiel

Nous allons cependant étudier les possibilités offertes par cette transformée en termes de filtrage afin d'affirmer ou d'infirmer les conclusions que nous avons obtenu sur le plan théorique.

Equivalence produit de convolution spatial, produit fréquentiel ? Le produit de convolution pour \mathcal{G}_2 est défini de la manière suivante [6] :

$$f * g(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}')g(\mathbf{x}')dV(\mathbf{x}') \quad (4.51)$$

Il est indiqué dans [6, 7] que l'équivalence directe entre produit de convolution spatial et produit fréquentiel n'est pas vérifiée. Cependant il existe une relation plus complexe basée sur la séparation entre partie vectorielle $\vec{f}(x, y) = f_1(x, y)e_1 + f_2(x, y)e_2$ et paravectorielle (partie scalaire plus bivectorielle) $f^p(x, y) = f_0(x, y)e_0 + f_{12}(x, y)e_{12}$ d'un élément de \mathcal{G}_2 :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f * g][u, v] = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f^p * g][u, v] + \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[\vec{f} * g][u, v] \quad (4.52)$$

avec

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f^p * g][u, v] = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f^p][u, v]\mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[g][u, v] \quad (4.53)$$

et

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[\vec{f} * g][u, v] = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[\vec{f}][u, v]\mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}[g][u, v] \quad (4.54)$$

Comme la fonction f vaut $f^p + \vec{f}$ le théorème de convolution comporte deux termes :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f * g][u, v] = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f^p][u, v]\mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[g][u, v] + \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[\vec{f}][u, v]\mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}[g][u, v] \quad (4.55)$$

On comprendra alors que le produit de convolution spatial est équivalent au produit fréquentiel uniquement pour la composante rouge qui dans notre cas est analysée par la partie para-bivectorielle. Au contraire pour les informations spectrales associées aux deux autres composantes couleurs qui sont mélangées cette équivalence est perdue. Comme nous le constatons, il existe bien une relation qui associe la transformée de Fourier au produit de convolution. Cependant il n'apparaît pas aisé de l'interpréter (comme par exemple en termes de gain fréquentiel de filtre). Les auteurs du papier [6, 7] remarquent aussi cette relation d'équivalence mais ne fournissent pas non plus d'éléments d'interprétation.

Application : Multiplication du spectre par une gaussienne Nous avons voulu ici illustrer l'influence de la multiplication du spectre par une fonction réelle et évaluer le résultat après transformée de Fourier inverse. La figure 4.6 illustre le résultat de la multiplication par une fonction gaussienne du spectre de l'image couleur d'origine. L'image résultat est ensuite obtenue par transformation de Fourier inverse du spectre modifié suivant :

$$f[m, n] = \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}(F[o, p]G[o, p]) \quad (4.56)$$

Une gaussienne 2D centrée en (m_0, n_0) avec α l'amplitude et σ l'écart type est la fonction réelle suivante :

$$g[m, n] = \alpha e^{-\frac{(m-m_0)^2+(n-n_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.57)$$

Le résultat obtenu à la figure 4.6c montre qu'en multipliant le spectre par une gaussienne qui sélectionne les basses fréquences, on obtient une image filtrée dont les contours ont été fortement atténués. La gaussienne a été appliquée de manière indépendante sur chacune des composantes du spectre. Cependant, l'image obtenue après transformée de Fourier inverse n'est pas un produit de convolution de l'image d'origine par une gaussienne, car :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}(F[o, p]G[o, p]) &= \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}(\vec{F}[o, p]G[o, p]) + \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}(F^p[o, p]G[o, p]) \\ &= \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}(\vec{F}[o, p]G[o, p]) + \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}(f^p * g)[m, n] \\ &\neq \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}(\vec{f} * g)[m, n] + \mathcal{F}_{\mathcal{H}^-}(f^p * g)[m, n] \end{aligned} \quad (4.58)$$

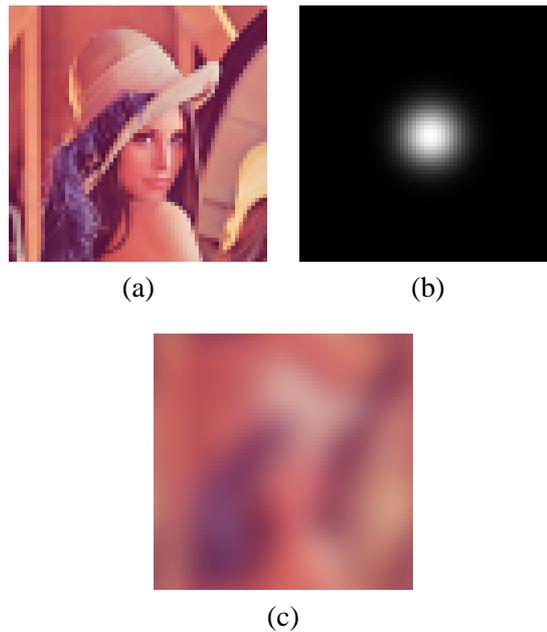


FIG. 4.6 – Première ligne : (a) image originale, (b) gaussienne 2D (les coordonnées sont centrées au milieu de l'image) ; Deuxième ligne : (c) image filtrée

4.3.1.4 Conclusion

L'hypothèse de l'utilisation de l'algèbre géométrique \mathcal{G}_2 pour les images couleur était que cette algèbre était adaptée à la définition d'une analyse spectrale des images couleur par une transformée de Fourier Cliffordienne et pourquoi pas au formalisme de description des structures en deux dimensions comme définies par l'équipe de Kiel (Sommer, Büllow et Felsberg). Cependant de part l'encodage des informations couleur sur des entités complètement différentes de l'algèbre par nature (utilisation des parties scalaire et vectorielle), il n'est pas possible de définir des opérations géométriques manipulant les couleurs au sein de l'espace spatial. Nous avons alors cherché à caractériser numériquement le spectre cliffordien en décrivant ses symétries relatives à la définition du codage spatial d'une image. En utilisant la transformée de Fourier que nous avons défini, il est apparu que la partie scalaire doit être paire, la partie bivectorielle impaire pour retomber dans le domaine de définition d'une image après transformée inverse. De plus, il n'existe pas de symétrie sur la partie vectorielle. En interprétant le contenu fréquentiel du spectre, on constate que la partie scalaire de l'image est décrite avec ses variations paires sur la partie scalaire du spectre et ses variations impaires sur la partie bivectorielle du spectre. Les informations correspondant aux deux autres composantes couleur sont mélangées au sein de la partie vectorielle du spectre (il n'y a pas de symétrie sur cette partie fréquentielle). Nous avons donc la conclusion logique que la structure numérique du spectre n'attache pas la même importance à toutes les composantes couleur car elles n'y sont pas analysées de la même façon. Pour toutes ces raisons, nous pensons que l'interprétation fréquentielle couleur des images en utilisant cette transformée de Fourier dans \mathcal{G}_2 n'est pas satisfaisante. Il est alors peut-être possible de définir une analyse spectrale des images couleur avec ce formalisme mais à mon avis ce ne pourra pas être fait avec une seule TF. Il faudra donc certainement séparer les canaux couleur à analyser et donc définir par là, plusieurs TF pour analyser l'image complète. Cette approche n'est pas dans le cadre de notre étude car elle ne prendrait pas en compte l'information couleur dans sa globalité, même si elle rajouterait des précisions en terme d'analyse de structures 2D, de la même façon que la TF en niveaux de gris de Büllow.

Nous allons maintenant étudier l'algèbre géométrique \mathcal{G}_3 qui présente beaucoup plus d'avantages que \mathcal{G}_2 dans la manipulation ainsi que l'analyse des couleurs.

4.3.2 \mathcal{G}_3 et images couleur

4.3.2.1 Les quaternions sous algèbre de \mathcal{G}_3

La section 4.1.9 nous a montré que les quaternions pouvaient être vus comme une sous-algèbre paire de \mathcal{G}^3 . Ceci revient à dire que lors de notre étude des quaternions appliqués aux images couleur nous avons codé l'information colorimétrique sur les trois parties bivectorielles d'un multivecteur de \mathcal{G}^3 . Une transformation de Fourier utilisant les bivecteurs de \mathcal{G}^3 est donc construite en généralisant celle définie avec les quaternions (cf. équation 3.25) par l'identification donnée dans la sous-section 4.1.9. Cependant nous avons déjà analysé une telle transformation. Dans cette partie, nous allons définir une nouvelle transformée de Fourier appliquée aux images couleur utilisant l'algèbre géométrique \mathcal{G}_3 . La manière dont sera encodée la couleur préservera la possibilité d'effectuer des transformations géométriques sur les vecteurs couleur. En effet nous proposons qu'une couleur soit considérée comme un 1-vecteur de \mathcal{G}_3 . On codera donc l'image par une fonction de $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{G}_3$ avec $f[m, n] = f_1[m, n]e_1 + f_2[m, n]e_2 + f_3[m, n]e_3$ pour une image RVB.

Avec f_1, f_2 et f_3 trois fonctions représentant les composantes couleurs nécessaires pour coder l'information par exemple rouge, vert et bleu dans un espace RVB (cf. figure 4.7).

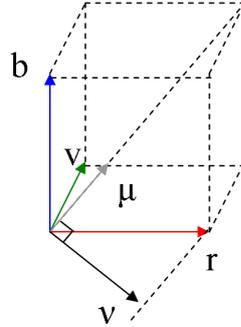


FIG. 4.7 – Représentation de l'espace couleur RVB avec \mathcal{G}_3 ; le 1-vecteur $r = e_1$ représente un rouge pur ; $v = e_2$ représente le vert ; $b = e_3$ représente le bleu ; on définit $\mu = \frac{r+v+b}{\sqrt{3}}$ le vecteur représentant les niveaux de gris et $\nu = (r \wedge \mu)\mu^{-1}$ la réjection de r par rapport à μ .

4.3.2.2 Définition d'une « transformation de Fourier Cliffordienne couleur »

Dans une image de dimension $M \times N$, on définira la « transformation de Fourier Cliffordienne couleur » dans \mathcal{G}_3 discrète (TFCG3D) par :

Pour $o = 0, \dots, M - 1$ et $p = 0, \dots, N - 1$

$$F[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m, n] \exp^{-2\pi e_{123} \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right)} \quad (4.59)$$

o et p étant les coordonnées dans le domaine fréquentiel tandis que m et n sont les coordonnées dans le domaine spatial.

On observe que le noyau de la transformée est différent de celui de la définition donnée dans [6, 7], en effet ici, on revient à la définition classique contenant une somme et non une différence sur les coordonnées dans les exponentielles. On utilisera ici le fait que le pseudoscalaire e_{123} commute avec tous les éléments de la base de \mathcal{G}_3 pour distribuer l'information spectrale sur les différentes composantes comme nous le verrons. Nous n'utilisons donc pas une stratégie de distribution de l'information suivant les axes horizontaux et verticaux comme l'équipe de Kiel.

En revanche le produit de \mathcal{G}_3 n'est pas commutatif, il est donc possible de définir d'autres transformations de Fourier de la même façon qu'avec les quaternions : les transformées de Fourier discrètes à droite, à gauche et à deux côtés.

Comme pour la plupart des transformées de Fourier hypercomplexes [31], [27], [55] et [24], il est possible d'effectuer la transformation de Fourier Cliffordienne couleur définie précédemment en utilisant des transformations de Fourier complexes rapides classiques. Ceci permet des temps de calculs améliorés de manière à pouvoir effectuer cette transformation sur des images numériques de façon plus aisée. La décomposition est détaillée dans l'annexe B.1.

Dans [47], il est défini une transformée de Fourier continue Cliffordienne équivalente à notre transformée de Fourier Cliffordienne discrète couleur utilisant \mathcal{G}_3 . Cette transformée de Fourier est étudiée en détails et il apparaît que les propriétés basiques des transformées de Fourier complexes sont conservées. Comme l'élément de l'algèbre géométrique du noyau est e_{123} et que dans \mathcal{G}_3 c'est un élément qui commute avec tous les autres, la transformée de Fourier ainsi définie conserve :

- la linéarité : si $f(\mathbf{x}) = \alpha f_1(\mathbf{x}) + \beta f_2(\mathbf{x})$ alors $\mathcal{F}\{f\}(\mathbf{u}) = \alpha \mathcal{F}\{f_1\}(\mathbf{u}) + \beta \mathcal{F}\{f_2\}(\mathbf{u})$;
- retard : si $f_a(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ alors $\mathcal{F}\{f_a\}(\mathbf{u}) = e^{-e_{123}\mathbf{u}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{F}\{f\}(\mathbf{u})$;
- facteur d'échelle : si $a \in \mathbb{R}^+$ et $f_a(\mathbf{x}) = f(a\mathbf{x})$ alors $\mathcal{F}\{f_a\}(\mathbf{u}) = \frac{1}{a^3} \mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\mathbf{u}}{a}\right)$;
- shift : si $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ et $f_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})e^{e_{123}\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{x}}$ alors $\mathcal{F}\{f_0\}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}\{f\}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)$;
- dérivée : $\mathcal{F}\{\nabla f\}(\mathbf{x}) = e_{123}\mathbf{u} \mathcal{F}\{f\}(\mathbf{u})$;
- théorème de convolution : $\mathcal{F}\{f_1 * f_2\}(\mathbf{x}) = \mathcal{F}\{f_1\}(\mathbf{u}) \mathcal{F}\{f_2\}(\mathbf{u})$.

Ces propriétés théoriques très intéressantes ont été développées de manière totalement indépendantes de nos travaux.

Calcul général numérique Tout comme pour les quaternions, nous développons la partie cartésienne de l'expression de la transformée de Fourier définie par l'équation (4.59). Le calcul en détail est fourni dans l'annexe B.2.

On découpe donc l'information couleur du pixel f de coordonnées m et n en trois composantes, rouge $r[m, n] = f_1[m, n]$, verte $v[m, n] = f_2[m, n]$ et bleue $b[m, n] = f_3[m, n]$.

$$\begin{aligned}
 F[o, p] = & \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} [f_1[m, n]e_1 + f_2[m, n]e_2 + f_3[m, n]e_3] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \\
 & + [-f_1[m, n]e_{23} - f_2[m, n]e_{31} - f_3[m, n]e_{12}] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

On remarque que le spectre ne contient pas d'information sur ses parties scalaires et trivectorielles. Par contre l'information de couleur est séparée sur la partie vectorielle pour les variations paires et la partie bivectorielle pour les variations impaires. On voit aussi que chacune des variations impaires décrites dans la partie bivectorielle est associée à la composante duale de la partie vectorielle. Autrement dit e_{23} est associé à f_1 , e_{31} est associé à f_2 et e_{12} est associé à f_3 . Chaque composante couleur est donc traitée de la même façon dans le spectre ce qui est déjà complètement différent de ce que nous avons constaté avec la transformée de Fourier Cliffordienne dans \mathcal{G}_2 . On peut dire que cette transformée de Fourier Cliffordienne qui utilise la partie pseudoscalaire dans le noyau de l'exponentielle est donc équivalente à une transformée de Fourier marginale qui consiste à appliquer une transformée de Fourier complexe sur chaque composante couleur.

Transformée de Fourier inverse Il est également possible de développer l'expression de la transformée de Fourier inverse (cf. annexe B.3) :

$$\begin{aligned}
 f[m, n] = & \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[F_0[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{123}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_0 \\
 & + \left[F_1[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{23}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_1 \\
 & + \left[F_2[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{31}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_2 \\
 & + \left[F_3[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{12}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_3 \\
 & + \left[F_{23}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_1[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{23} \\
 & + \left[F_{31}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_2[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{31} \\
 & + \left[F_{12}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_3[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{12} \\
 & + \left[F_{123}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_0[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{123}
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Ce calcul va nous servir à définir les propriétés de symétrie du spectre obtenu par la transformée de Fourier Cliffordienne d'une image numérique couleur.

Définition numérique de l'espace de Fourier « Cliffordien »

- Conditions d'initialisation du spectre :

Encore une fois le calcul est le même que celui utilisé avec les quaternions, donc pour pouvoir reconstruire le signal d'une image couleur par notre transformée de Fourier inverse il faudra respecter les conditions générales de symétrie du spectre qui suivent avec $\forall o \in [-\frac{M}{2} + 1; \frac{M}{2} + 1]$ et $p \in [-\frac{N}{2} + 1; \frac{N}{2} + 1]^2$:

$$\begin{aligned}
 F_0[o, p] &= 0 \\
 F_1[o, p] &= F_1[-o, -p] \\
 F_2[o, p] &= F_2[-o, -p] \\
 F_3[o, p] &= F_3[-o, -p] \\
 F_{23}[o, p] &= -F_{23}[-o, -p] \\
 F_{31}[o, p] &= -F_{31}[-o, -p] \\
 F_{12}[o, p] &= -F_{12}[-o, -p] \\
 F_{123}[o, p] &= 0
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

De nouveau, nous cherchons à décrire les fonctions analysantes à partir du protocole déjà expliqué (cf. annexe B.5).

- Initialisation sur une composante vectorielle :

L'initialisation est effectuée avec $F_1[o_0, p_0] = F_1[-o_0, -p_0]$, on obtient la variation spatiale suivante :

$$f[m, n] = 2F_1[o_0, p_0] \cos \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] e_1 \tag{4.63}$$

Le même type de variation est obtenu en initialisant le spectre sur la deuxième ou la troisième composante vectorielle.

- Initialisation sur une composante bi-vectorielle :

L'initialisation est effectuée avec $F_{23}[o_0, p_0] = -F_{23}[-o_0, -p_0]$, on obtient la variation spatiale suivante :

$$f[m, n] = -2F_{23}[o_0, p_0] \sin \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] e_1 \quad (4.64)$$

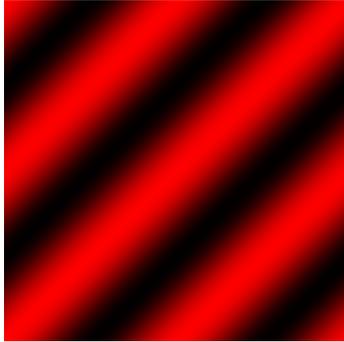
On obtient le même résultat avec la deuxième ou troisième composante bi-vectorielle.

On remarquera ici que les informations fréquentielles sont séparées. En effet, les composantes vectorielles du spectre correspondent aux variations paires du domaine spatial pour chaque canal séparément. De plus, les variations impaires du signal sont elles aussi récupérées par notre transformée de Fourier et également indépendamment sur chaque composante bivectorielle du spectre.

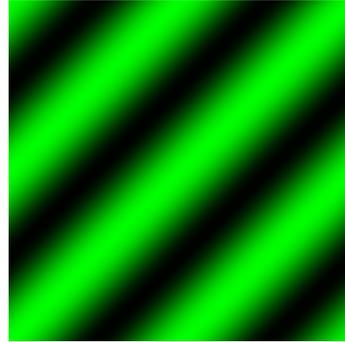
Illustration dans l'espace couleur RVB

– Différentes initialisations :

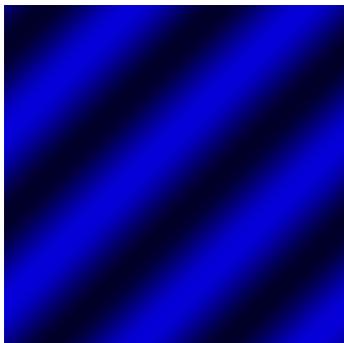
Lorsqu'on initialise un point fréquentiel sur une ou plusieurs parties imaginaires du spectre (cf. figure 4.8), en utilisant la transformée de Fourier Cliffordienne couleur inverse, nous obtenons comme décrit dans la partie précédente, des oscillations de couleurs. La couleur dominante de ces oscillations correspond à l'axe ou aux axes concernés par l'initialisation si celle-ci est faite sur une composante vectorielle. On voit que la variation est décrite pour les sous-figures a, b et d par la couleur rouge lorsque qu'on initialise le spectre avec F_1 , verte avec F_2 et magenta somme du rouge et du bleu avec F_1 et F_3 . La sous-figure c présente une variation de couleur bleue car le spectre est initialisé par F_{12} qui est le dual de l'axe vectoriel F_3 représentant le bleu. On constate aussi le décalage de phase entre cette troisième sous-figure et les autres. En effet, la variation est impaire lorsqu'on l'initialise le spectre sur une composante bivectorielle alors qu'elle est paire si on l'initialise avec une composante vectorielle.



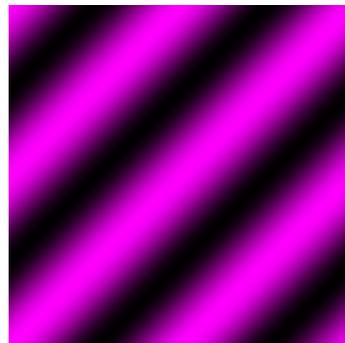
(a) $F_1(2, 2) = F_1(-2, -2) = K$



(b) $F_2(2, 2) = F_2(-2, -2) = K$



(c) $F_{12}(2, 2) = -F_{12}(-2, -2) = K$



(d) $F_1(2, 2) = F_1(-2, -2) = K$
 $F_3(2, 2) = F_3(-2, -2) = K$

FIG. 4.8 – Initialisation du spectre sur différentes composantes

– Variations géométriques :

Nous pouvons régler aussi l'orientation des variations de couleur suivant les coordonnées des points affectés en amplitude dans le domaine fréquentiel. Cette orientation suivra un axe perpendiculaire à la droite reliant les deux points affectés par l'initialisation d'amplitude fréquentielle et passant par l'origine. On se place dans un repère d'interprétation où l'origine est située au centre de l'image.

Nous choisissons par exemple pour la figure suivante (cf. figure 4.9) d'illustrer différentes orientations spatiales en fonction des points du plan fréquentiel initialisés en amplitude (oscillations dans le jaune).

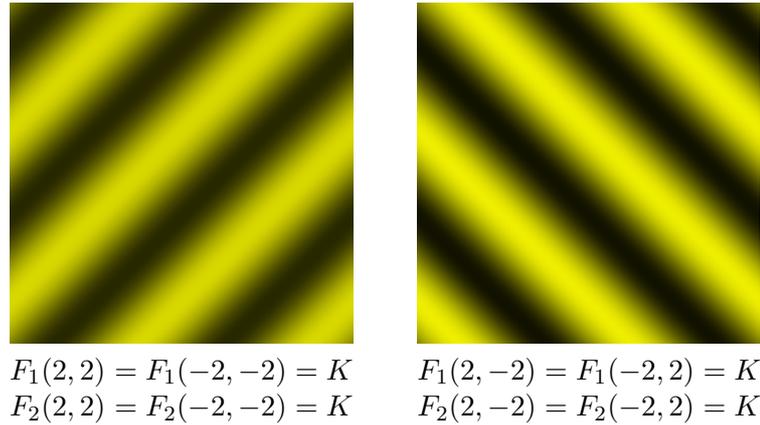


FIG. 4.9 – Variations Géométriques

4.3.2.3 Filtrage fréquentiel couleur avec \mathcal{G}_3

Comme précédemment, nous pouvons nous servir de l'analyse spectrale de notre transformée de Fourier afin d'effectuer un schéma de filtrage fréquentiel. Celui-ci est obtenu par fenêtrage dans le domaine fréquentiel d'une image. Ensuite nous effectuons une transformation de Fourier Cliffordienne inverse pour obtenir l'image spatiale filtrée. Les coefficients du filtre sont choisis afin de sélectionner les fréquences voulues. Les résultats obtenus sont illustrés par la figure 4.10.

Nous venons donc de voir qu'il est possible d'utiliser une transformation de Fourier Cliffordienne définie dans \mathcal{G}_3 pour analyser l'information fréquentielle des images couleur. Nous proposons maintenant d'utiliser ce même formalisme afin de définir des opérations de manipulation des couleurs dans le domaine spatial.

4.4 Approche spatiale par algèbres géométriques pour les images couleur

Comme dans la partie définissant la transformée de Fourier Cliffordienne précédente, nous choisissons d'encoder l'information couleur associée à l'espace RVB sur les trois parties vectorielles d'un multivecteur de \mathcal{G}_3 . Nous proposons tout d'abord d'exprimer ces composantes RVB , grâce à l'utilisation des transformations géométriques de \mathcal{G}_3 , en termes de composantes perceptuelles, c'est à dire en teinte, saturation et clarté.

4.4.1 Exprimer les couleurs RVB dans un espace Teinte Saturation Intensité

4.4.1.1 Teinte, saturation et intensité en fonction d'un 1-vecteur m

De la même manière qu'il est possible d'exprimer un quaternion donné en RVB (Rouge Vert Bleu) sous forme de Teinte, Saturation, Intensité (cf. section 3.2.3), les transformations géométriques nous permettent d'exprimer un pixel couleur m donné dans l'espace RVB avec l'algèbre \mathcal{G}_3 également sous

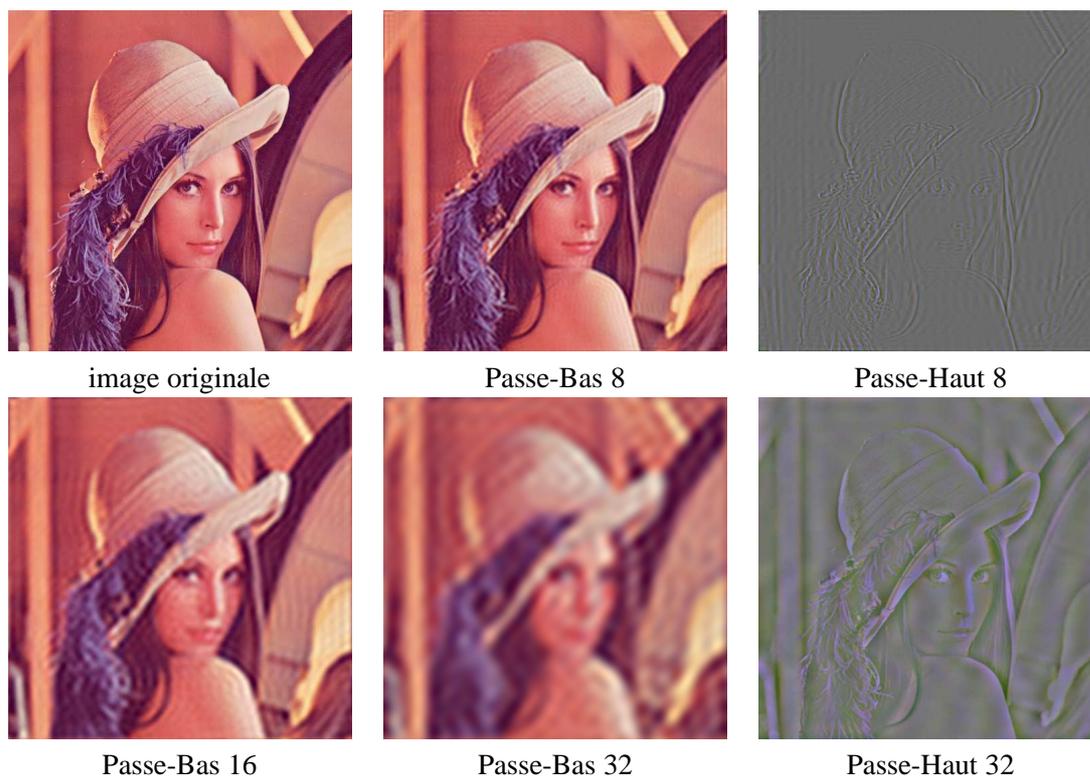


FIG. 4.10 – Lenna et son résultat après application de différents filtres fréquentiels

cette forme (cf. figure 4.11). On obtient donc une généralisation de cette écriture quaternionique exprimée dans [35] avec le formalisme \mathcal{G}_3 .

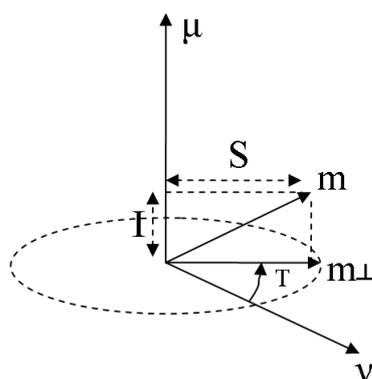


FIG. 4.11 – On peut donner les équivalents de teinte T , saturation S et intensité I pour n'importe quel 1-vecteur m exprimé dans l'espace couleur RVB . Ici μ représente l'axe des niveaux de gris et ν est la réjection par rapport à μ du vecteur représentant le rouge pur.

Soient μ le 1-vecteur portant l'axe des niveaux de gris, r celui portant le vecteur couleur rouge pur, et m un 1-vecteur couleur quelconque.

- L'intensité est la norme de la projection du 1-vecteur couleur RVB m sur l'axe des niveaux de gris μ , elle s'exprime par :

$$I = |(m] \mu) \mu^{-1}| \quad (4.65)$$

- La saturation est la distance du vecteur couleur RVB m par rapport à l'axe des niveaux de gris, c'est donc la norme de la réjection du vecteur couleur par rapport à cet axe :

$$S = |(m \wedge \mu) \mu^{-1}| \quad (4.66)$$

- La teinte est l'angle entre un 1-vecteur de référence que l'on notera ν (réjection du 1-vecteur r par rapport à μ par exemple) et la réjection du 1-vecteur m par rapport à μ (cf. figure 4.12).

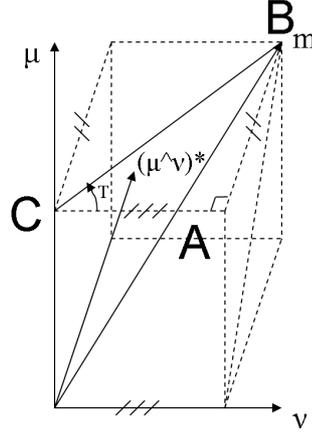


FIG. 4.12 – Pour trouver la teinte T , on se place dans le triangle ABC rectangle en A . On obtient $\tan(T) = \frac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{AC}\|}$.

$\|\vec{AB}\|$ est la norme de la projection du vecteur m sur le vecteur $(\mu \wedge \nu)^*$.

$$\|\vec{AB}\| = |(m \wedge (\mu \wedge \nu)^*)(\mu \wedge \nu)^{-1}| = |(m \wedge (\mu \nu)^*)(\mu \nu)^{-1}|$$

$\|\vec{AC}\|$ est la norme de la projection du vecteur m sur le vecteur ν .

$$\|\vec{AC}\| = |(m \wedge \nu) \nu^{-1}|$$

La teinte est donc obtenue par la formule suivante :

$$T = \tan^{-1} \left(\frac{|(m \wedge \mu \nu^*)(\mu \nu^*)^{-1}|}{|(m \wedge \nu) \nu^{-1}|} \right) = \frac{\|\vec{AB}\|}{\|\vec{AC}\|} \quad (4.67)$$

On a $|\mu| = |\nu| = 1$ et $\mu \perp \nu$ donc $\mu \wedge \nu = \mu \nu$, $(\mu \wedge \nu)^* = (\mu \nu)^*$ et $|\mu \nu| = |(\mu \nu)^*| = 1$

4.4.1.2 Le 1-vecteur m exprimé en fonction de la teinte, la saturation et l'intensité

Nous pouvons exprimer la teinte, la saturation et l'intensité d'un vecteur m exprimé dans la base RVB . Il serait maintenant intéressant de pouvoir effectuer la conversion dans l'autre sens c'est à dire, de pouvoir exprimer le vecteur m en fonction de sa teinte, sa saturation et son intensité. Les informations de saturation et d'intensité peuvent être retrouvées facilement en utilisant les mêmes transformations géométriques que dans la partie précédente. Il nous faut cependant pouvoir exprimer la teinte au moyen des outils de l'algèbre \mathcal{G}_3 . Cette teinte T est l'angle entre ν (réjection de r par rapport à μ) et la réjection de m par rapport à μ que nous appellerons m_{\perp} .

Nous disposons des 1-vecteurs suivants : $r, m, \mu, \nu = (r \wedge \mu) \mu^{-1}$.

$$|r| = |\mu| = |\nu| = 1$$

$$m_{\perp} = (m \wedge \mu)\mu^{-1}$$

T est l'angle entre m_{\perp} et ν , nous pouvons donc le faire apparaître par l'intermédiaire du produit géométrique entre ces deux 1-vecteurs $m_{\perp}\nu = |m_{\perp}||\nu| \exp^{\frac{m_{\perp}\wedge\nu}{|m_{\perp}\wedge\nu|}T} = |m_{\perp}| \exp^{\frac{m_{\perp}\wedge\nu}{|m_{\perp}\wedge\nu|}T}$.

Comme m_{\perp} et ν sont des réjections par rapport à μ , le bivecteur qui leur est associé est orthogonal à μ et donc colinéaire au dual de μ d'où $\frac{m_{\perp}\wedge\nu}{|m_{\perp}\wedge\nu|} = \mu^*$.

Nous avons vu que $|m_{\perp}| = |(m \wedge \mu)\mu^{-1}| = S$, nous obtenons donc $m_{\perp}\nu = S \exp^{\mu^*T}$.

Et par conséquent :

$$m_{\perp}\nu = S \exp^{\mu^*T}$$

$$m_{\perp}\nu\nu^{-1} = S \exp^{\mu^*T} \nu^{-1}$$

$$m_{\perp} = S \exp^{\mu^*T} \nu^{-1}$$

$$m_{\perp} = S \exp^{\mu^*T} \nu$$

Nous pouvons conclure qu'il est possible d'écrire un vecteur m exprimé dans la base RVB en fonction de sa teinte, sa saturation et son intensité telle que :

$$m = m_{\parallel} + m_{\perp}$$

$$m = I\mu + m_{\perp} \tag{4.68}$$

$$m = I\mu + S e^{\mu^*T} \nu$$

Il nous reste à exprimer les composantes rouge, verte et bleue d'un multivecteur m en fonction de l'équation (4.68).

Pour cela, sachant que m s'exprime par $I\mu + S e^{\mu^*T} \nu$, que μ est ici l'axe des niveaux de gris $\frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}}$ et que ν est le 1-vecteur unitaire portant la réjection du vecteur rouge e_1 par rapport à μ :

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{3}}e_1 - \frac{e_2}{\sqrt{6}} - \frac{e_3}{\sqrt{6}}.$$

On développe le calcul :

$$I\mu = I \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}}$$

$$\mu^* = -\frac{e_{23} + e_{31} + e_{12}}{\sqrt{3}}$$

$$\mu^*\nu = \frac{\sqrt{2}(e_2 - e_3)}{2}$$

$$S e^{\mu^*T} \nu = S \cos(T)\nu + S \sin(T)\mu^*\nu$$

$$= S \cos(T) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}e_1 - \frac{e_2}{\sqrt{6}} - \frac{e_3}{\sqrt{6}} \right) + S \sin(T) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(e_2 - e_3) \right)$$

On peut donc exprimer m en fonction de e_1, e_2 et e_3 :

$$m = I\mu + S e^{\mu^*T} \nu$$

$$= \left[\frac{I + \sqrt{2}S \cos(T)}{\sqrt{3}} \right] e_1$$

$$+ \left[\frac{I}{\sqrt{3}} - \frac{S}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(T)}{\sqrt{3}} - \sin(T) \right) \right] e_2 \tag{4.69}$$

$$+ \left[\frac{I}{\sqrt{3}} - \frac{S}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(T)}{\sqrt{3}} + \sin(T) \right) \right] e_3$$

Et ainsi, comme chaque composante vectorielle est associée à un canal couleur, on obtient :

$$\begin{cases} r = \frac{I + \sqrt{2}S \cos(T)}{\sqrt{3}} \\ v = \frac{I}{\sqrt{3}} - \frac{S}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(T)}{\sqrt{3}} - \sin(T) \right) \\ b = \frac{I}{\sqrt{3}} - \frac{S}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos(T)}{\sqrt{3}} + \sin(T) \right) \end{cases} \quad (4.70)$$

Ces relations vont nous permettre de modéliser des transformations couleur.

4.4.2 Transformations géométriques couleur

4.4.2.1 Projection

On peut utiliser la projection pour réaliser des transformations couleur sur nos images. Par exemple en projetant une image originale sur les axes rouge, vert ou bleu on obtient les différents canaux couleur de l'image comme illustré dans la figure 4.13. Il est aussi possible comme nous l'illustrons figure 4.13f d'obtenir l'image en niveaux de gris en projetant l'image d'origine sur l'axe des intensités ou axe des niveaux de gris. En prenant δ le 1-vecteur sur lequel sera projeté l'image I , on obtient l'image I' telle que :

$$I'(x, y) = (I(x, y) \rfloor \delta) \delta^{-1} \quad (4.71)$$

Chaque couleur sera donc projetée sur l'axe δ .

On remarquera qu'il est aussi possible d'effectuer des projections sur des 1-vecteurs particuliers selon l'application. Ainsi la figure 4.13d illustre la projection effectuée sur le 1-vecteur $e_1 + e_2$. On remarque dans le résultat que la projection est cohérente avec la synthèse additive des couleurs. En effet, en synthèse additive, le jaune résulte de la somme du rouge et du vert. C'est pour cela que sur l'image résultat le jaune a son maximum d'intensité à l'endroit même où les cercles rouge et vert s'entrecroisaient. Cependant on remarque aussi que comme le jaune est composé de rouge, la zone purement rouge est aussi détectée lors de la projection. Il en est de même avec la zone verte. Le bleu étant orthogonal aux couleurs rouge et verte, il n'apparaît pas dans cette figure. Le 1-vecteur sur lequel sera projeté les couleurs peut donc être décrit avec des poids différents selon les composantes. Ceci est illustré avec la figure 4.13e pour laquelle on a appliqué une projection sur le 1-vecteur $v = 0.5e_2 + 0.2e_3$. Encore une fois, là où les deux composantes e_2 et e_3 apportent le même niveau maximum dans l'image d'origine, le résultat correspond exactement à la description du vecteur. On pourra donc se servir de l'opération de projection sur des images couleur pour faire apparaître les couleurs de l'image antagonistes à celle utilisée dans l'axe de la projection.

4.4.2.2 Rotations

Il est possible tout comme nous l'avons fait avec les projections d'effectuer des rotations dans l'espace couleur. La figure 4.14 illustre ce type d'opération avec ici un axe de rotation égal à l'axe des niveaux de gris et un angle de $\frac{2\pi}{3}$. Le résultat modifie la teinte originale de l'image comme nous le verrons dans la partie suivante. Cependant il est aussi possible d'utiliser des axes différents pour effectuer des rotations couleur. Les résultats ne s'exprimeront par contre plus en termes de variation de teinte.

4.4.2.3 Modification des caractéristiques colorimétriques

On va pouvoir utiliser l'expression du 1-vecteur couleur m en fonction des paramètres correspondant de teinte, intensité et saturation pour effectuer des opérations de modification de ces trois caractéristiques couleur. Nous avons pour cela généralisé le formalisme exprimé avec les quaternions dans [35] aux algèbres géométriques.

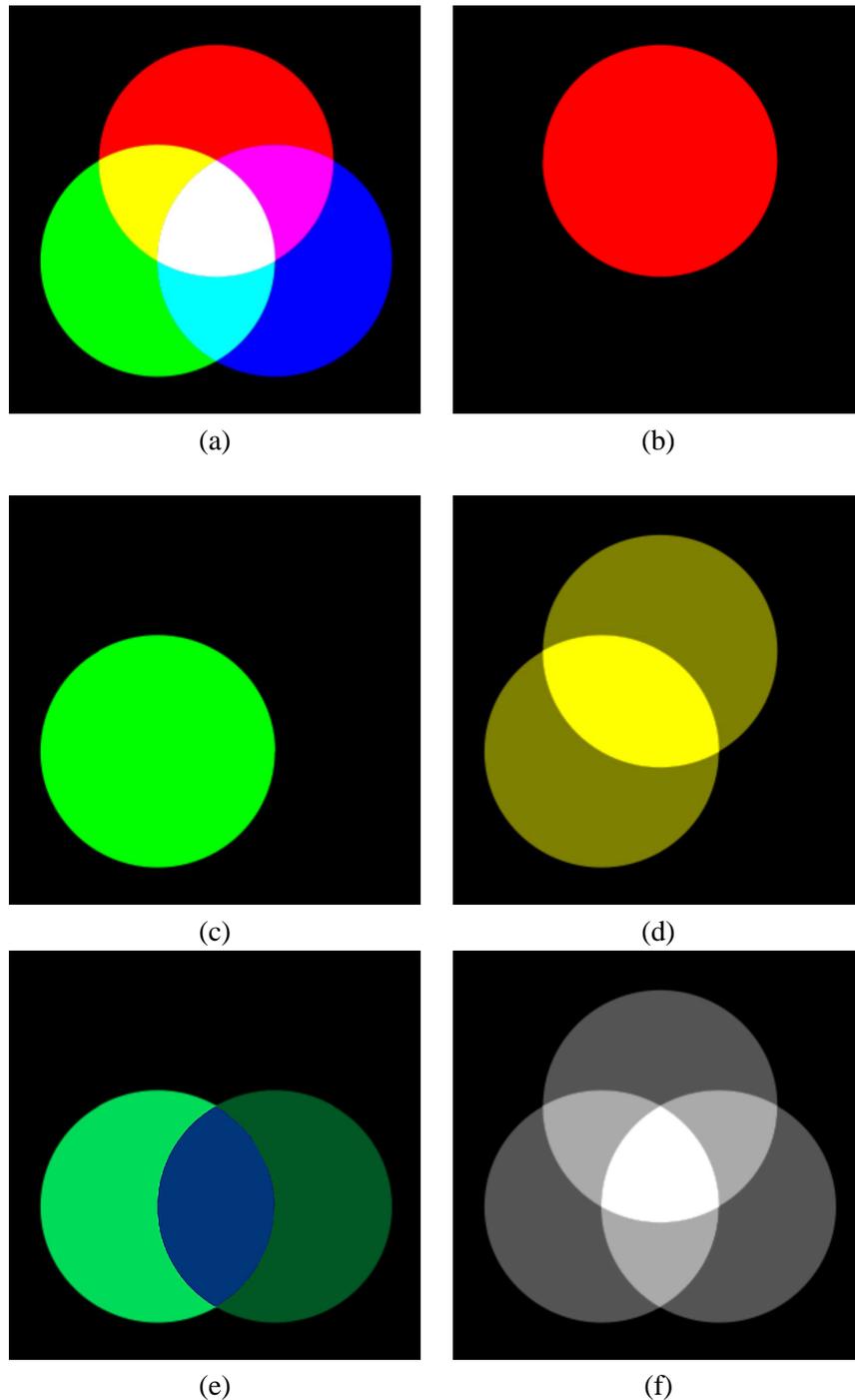


FIG. 4.13 – Image originale (a) et sa projection sur les axes rouge e_1 (b), vert e_2 (c), jaune $e_1 + e_2$ (d), $0.5e_2 + 0.2e_3$ (e) et sur l'axe des niveaux de gris $e_1 + e_2 + e_3$ (f).

Changement de teinte La teinte des couleurs peut être modifiée en utilisant les rotations autour de l'axe des niveaux de gris. Pour modifier la teinte, on utilisera la rotation du vecteur couleur m autour de l'axe des niveaux de gris μ , ou bien de façon équivalente, autour du bivecteur unitaire μ^* , dual de μ (cf. équation 4.15).

On pourra dès lors effectuer une modification de la teinte en se basant sur ce qui suit :

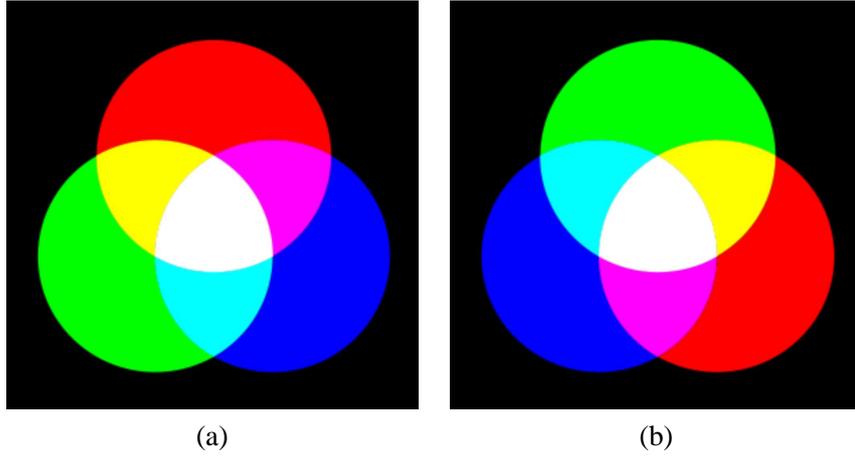


FIG. 4.14 – Image originale (a) et sa rotation d'un angle de $\frac{2\pi}{3}$ (b).

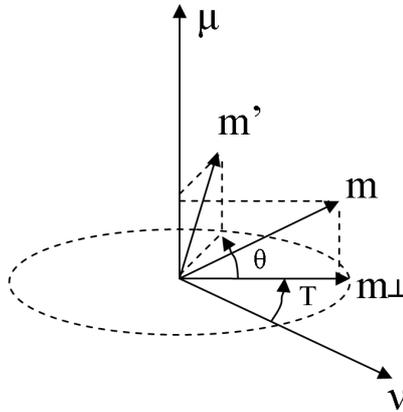


FIG. 4.15 – Modification de la teinte

$$\begin{aligned}
 m' &= e^{-\mu^* \frac{\theta}{2}} m e^{\mu^* \frac{\theta}{2}} \\
 m' &= I e^{-\mu^* \frac{\theta}{2}} \mu e^{\mu^* \frac{\theta}{2}} + S e^{-\mu^* \frac{\theta}{2}} e^{\mu^* T} \nu e^{\mu^* \frac{\theta}{2}} \\
 m' &= I \mu + S e^{\mu^* (T+\theta)} \nu \\
 T' &= T + \theta
 \end{aligned}
 \tag{4.72}$$

$I e^{-\mu^* \frac{\theta}{2}} \mu e^{\mu^* \frac{\theta}{2}} = I \mu$ car le vecteur μ est l'axe de la rotation.

La figure 4.16 illustre un tel changement de teinte. L'image d'origine (a) a été modifiée par une rotation de l'ensemble de ses pixels couleur par une rotation autour de l'axe des niveaux de gris d'un angle de $\frac{\pi}{3}$. Ainsi le toit rouge se retrouve vert, le seuil vert se retrouve bleu, etc.

Modification de la saturation Pour modifier la saturation il faut effectuer une translation de m d'un vecteur pondéré par le coefficient $\beta \in \mathbb{R}$ suivant l'axe des saturations μ , c'est à dire sa réjection par rapport à μ (cf. figure 4.17)

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
 m' &= I \mu + S' e^{\mu^* T} \nu m' = m + \beta e^{\mu^* T} \nu \\
 m' &= I \mu + (S + \beta) e^{\mu^* T} \nu \\
 S' &= S + \beta
 \end{aligned}
 \tag{4.73}$$

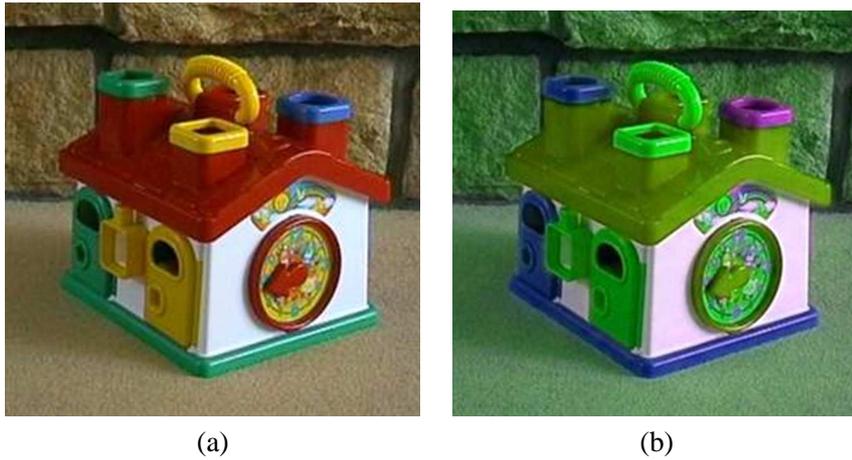


FIG. 4.16 – Modification de la teinte

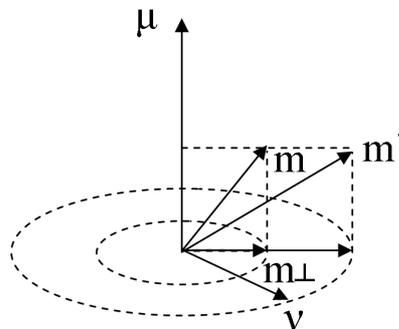


FIG. 4.17 – Modification de la saturation

La figure 4.18 illustre un tel changement de saturation. L'image d'origine (a) a été modifiée de la façon décrite en (4.73) pour obtenir l'image (b). L'effet produit par ce type d'opération est le suivant :

- Lorsqu'on retire de la saturation à l'image, comme dans le cas de la figure 4.18, l'image obtenue présente des couleurs pâles ou délavées par rapport à l'image d'origine.
- Lorsque l'image obtenue est plus saturée que l'image d'origine, ses couleurs paraissent alors plus vives.



FIG. 4.18 – Modification de la saturation

Modification de l'intensité Pour modifier l'intensité d'une couleur, on augmente ou on diminue sa clarté. Pour cela on effectue une translation de m d'un vecteur pondéré par le coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ suivant l'axe des intensités μ (cf. figure 4.19).

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
 m' &= I'\mu + Se^{\mu^*T} \nu m' = m + \alpha\mu \\
 m' &= I\mu + Se^{\mu^*T} \nu + \alpha\mu \\
 m' &= (I + \alpha)\mu + Se^{\mu^*T} \nu \\
 I' &= I + \alpha
 \end{aligned}
 \tag{4.74}$$

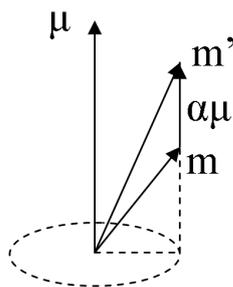


FIG. 4.19 – Modification de l'intensité

Le résultat d'une augmentation de l'intensité, illustré à la figure 4.20, montre que l'image modifiée (b) est plus contrastée, elle paraît également plus chaleureuse. La même image, avec une intensité diminuée par rapport à l'image d'origine, peut paraître plus triste. En effet, la lumière du soleil agit fréquemment sur nos sens et on a tendance à se sentir mieux un jour ensoleillé plutôt qu'une journée de pluie dont l'intensité de lumière est diminuée par les nuages. De plus, l'augmentation de l'intensité permet



FIG. 4.20 – Modification de l'intensité

On remarquera qu'il est possible d'effectuer toutes ces transformations couleurs grâce au fait que l'information couleur est contenue sur la partie vectorielle d'un multivecteur de \mathcal{G}_3 . En effet, les opérations de projections, translations, réjections, ... ne sont définies que pour des multivecteurs simples c'est à dire des multivecteurs dont l'information n'est pas séparée sur plusieurs grades. Nous utilisons donc convenablement les multivecteurs simples pour coder l'information de couleur car elle est stockée sur le grade 1 des multivecteurs de \mathcal{G}_3 . Le fait de coder l'information couleur sur plusieurs grades comme nous l'avons effectué dans la partie utilisant \mathcal{G}_2 interdit donc toute définition de transformation géométrique.

Après avoir vu qu'il était possible de manipuler les couleurs par des transformations géométriques, nous allons définir un détecteur de contours couleur qui se base sur ces transformations définies dans \mathcal{G}_3 .

4.5 Filtrage spatial par algèbre de Clifford

Il n'existe pour l'instant que très peu d'applications qui associent les algèbres de Clifford aux images numériques couleur. On peut cependant citer les travaux de Schlemmer et al. [67] qui utilisent la théorie des champs de vecteurs 2D définis dans [25] pour créer un gradient de chrominance qu'ils associent à un gradient d'intensité. Les parties chrominance et intensité utilisées pour créer ces deux gradients sont définies par passage de l'espace couleur RVB à l'espace couleur YUV . Il en résulte alors deux images qui seront traitées indépendamment. La première image est obtenue avec la seule composante Y , elle représente donc une information de clarté. Il est appliqué sur cette première image un détecteur de contours classique. La deuxième image, comportant l'information de chromaticité, est obtenue à partir des composantes U et V de l'image. L'originalité de ces travaux tient dans le fait que cette deuxième image est traduite en termes de champs de vecteurs avec la composante U codée sur la première partie vectorielle d'un multivecteur de \mathcal{G}_2 tandis que la partie en V est codée sur sa deuxième partie vectorielle. Ensuite, la technique du filtrage par motif (pattern matching) est utilisée pour retrouver des contours par similitude entre l'image UV et des éléments de motifs propres aux champs de vecteurs 2D. Les éléments de rotation, convergence et divergence, liés par définition à l'opérateur de dérivation, ont donc servi à détecter des contours dans le plan UV . On obtient une carte de similitudes entre le flot de données et le/les motif(s) utilisé(s) pour détecter des contours. Puis, on combine cette carte de similitudes avec le résultat obtenu dans le traitement de la clarté avec la première image pour aboutir à une détection globale des contours couleur.

Notre démarche est différente, car nous voulons manipuler une information complète autrement dit chacune des composantes nécessaires à la définition d'une couleur. Nous proposons d'adapter les filtres quaternioniques, vus au chapitre 3, et de les améliorer avec le formalisme de l'algèbre géométrique \mathcal{G}_3 . En effet, \mathcal{G}_3 nous permet de modéliser les transformations géométriques sur les vecteurs mais aussi permet de caractériser de manière géométrique la différence entre deux 1-vecteurs au moyen du produit géométrique comme nous l'avons vu à la section 4.1.8.

4.5.1 Approche détection de Sangwine

La méthode de filtrage spatial de Sangwine [63] utilisant les quaternions (vu à la section 3.2.4.4) est directement généralisable en utilisant le formalisme des algèbres géométriques. Il suffit pour cela de remplacer les quaternions par des vecteurs de \mathcal{G}_3 . Le résultat obtenu est donc un détecteur de contours. Nous avons cependant simplifié l'équation du schéma de filtrage avec l'algèbre géométrique en remplaçant l'opération de multiplication par les deux conjugués, qui prête à confusion, par une opération de rotation du pixel central du filtre par rapport à l'axe des niveaux de gris et d'un angle de π , ou autrement dit, une opération de réflexion par rapport à l'axe des niveaux de gris.

L'opération de filtrage proposée par Sangwine et généralisée au formalisme de \mathcal{G}_3 est la suivante :

$$f_{filtrée}[m, n] = (h_1 * f * h_2)[m, n] \quad (4.75)$$

où les filtres h_1 et h_2 sont une paire de filtres qui permettent d'effectuer la réflexion d'axe $\mu_{gris} = \mu = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}}$ comme suit :

$$h_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & \mu \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu^{-1} & \mu^{-1} & \mu^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

On remarquera que ce filtre est vertical et dirigé pour détecter les contours horizontaux.

Les résultats de ce filtrage sont exactement équivalents à ceux obtenus avec le formalisme des quaternions (cf. figure 4.21) car on ne fait que réécrire le problème en utilisant un formalisme différent. On note également des résultats différents suivant le sens d'application du filtre : sens 1 = droite vers gauche, sens 2 = inverse.

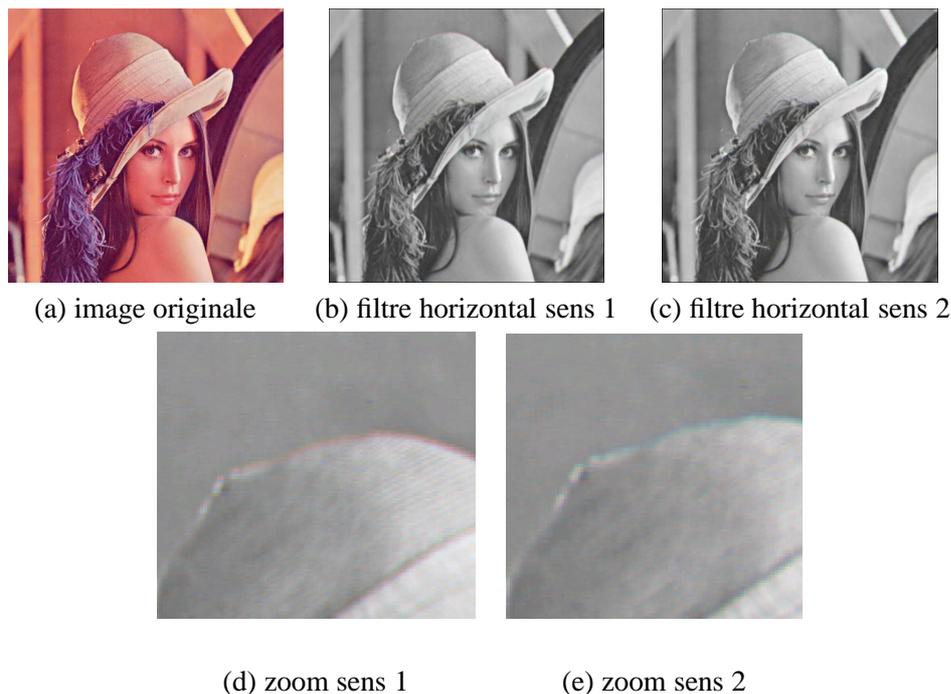


FIG. 4.21 – Le détecteur de contours de Sangwine adapté à \mathcal{G}_3

4.5.2 Approche par gradient de saturation

Pour améliorer ces résultats, nous avons ensuite proposé un schéma de filtrage qui calculait un gradient par maximum de distance sur la saturation (cf. section 3.2.4.5). Comme nous avons vu, l'inconvénient de cette méthode réside dans le fait que ce gradient n'est calculé que sur une mesure de saturation. Par exemple lorsque l'information d'un pixel est uniquement de type achromatique, la saturation est nulle et donc la valeur du gradient associé en ce point sera elle aussi nulle. En conclusion, cette méthode est incapable de détecter des différences d'intensité (cf. figure 4.22).

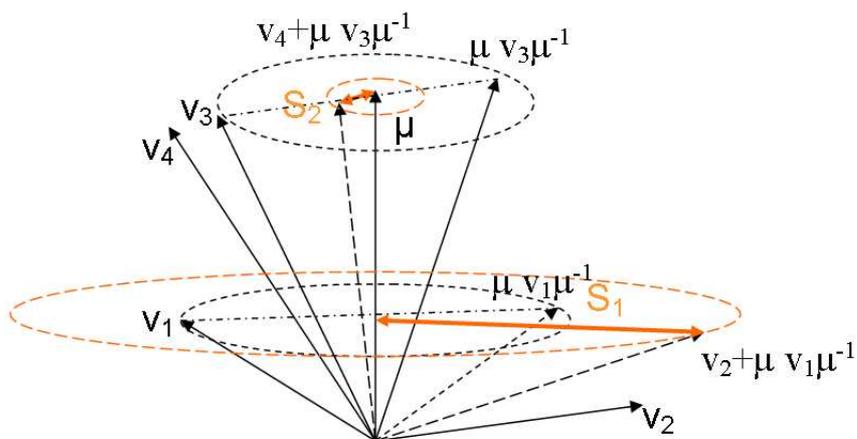


FIG. 4.22 – L'approche par gradient de saturation

4.5.3 Approche par gradient de saturation et produit géométrique[18]

Pour améliorer notre technique, nous proposons d'utiliser les algèbres géométriques afin d'apporter une description géométrique des couleurs par rapport à l'axe achromatique des niveaux de gris. Cette description géométrique est définie par le produit géométrique suivant : $f[m, n]\mu$.

En effet, comme nous l'avons vu, ce produit géométrique se décompose en une somme de deux parties comme l'illustre la figure 4.23.

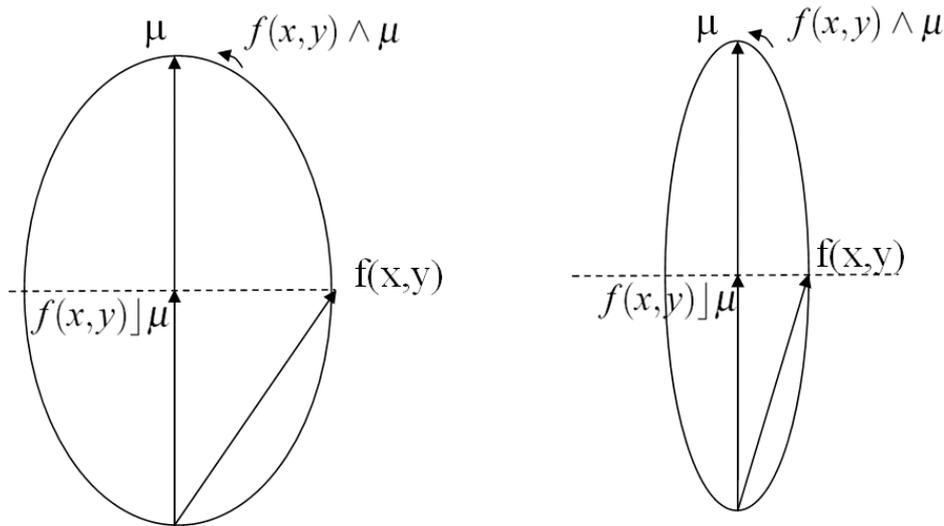


FIG. 4.23 – Le produit géométrique d'un pixel couleur $f[m, n]$ avec l'axe des niveaux de gris μ se décompose en une partie scalaire : $f[m, n]\mu$ et une partie bivectorielle : $f[m, n] \wedge \mu$. Plus le vecteur couleur $f[m, n]$ est éloigné de l'axe des niveaux de gris, plus la norme du bivecteur $f[m, n] \wedge \mu$ est grande.

- La première partie : $f[m, n] \wedge \mu$, est le produit vectoriel du pixel analysé avec l'axe des gris, c'est le bivecteur représenté par le plan porté par les vecteurs couleur $f[m, n]$ et μ . Lorsque la norme de cette partie est nulle, le vecteur couleur analysé est colinéaire à μ c'est à dire qu'il est porté par l'axe des niveaux de gris.
- La deuxième partie : $f[m, n]\mu$, est un scalaire correspondant à la projection du vecteur couleur $f[m, n]$ sur l'axe μ , autrement dit, son intensité.

Nous décrivons graphiquement le processus de construction de notre gradient couleur à partir de la figure 4.24a. Nous pourrons ensuite comparer cette nouvelle technique avec celle basée uniquement sur la caractéristique de saturation que nous avons définie juste avant (cf. figure 4.24b).

Nous proposons la méthode suivante :

- Pour chaque pixel de l'image, nous effectuons le produit géométrique $f[m, n]\mu$.
- Nous séparons dans le résultat les parties scalaire et bivectorielle.
- Nous calculons la norme de la partie bivectorielle. Cette norme nous permet de savoir à quels endroits de l'image l'information est de type achromatique. Nous voyons très bien dans la figure 4.25 qu'il y a deux zones où la norme est quasi nulle sinon nulle. Ces deux zones correspondent aux deux rectangles au centre de l'image. En regardant l'image originale, il est évident que ces zones sont composées uniquement de pixels en niveaux de gris. Donc quand la norme de la partie bivectorielle est proche de zéro, nous avons bien des pixels achromatiques.
- L'étape suivante consiste à construire un masque à partir de cette norme. Ce masque est construit par un seuillage de la norme permettant de séparer les zones de norme très faibles des autres zones de l'image où les informations de chromaticité prédominent sur l'information d'intensité. Le seuil est déterminé de façon empirique. Ainsi ce masque permet de conserver uniquement les pixels

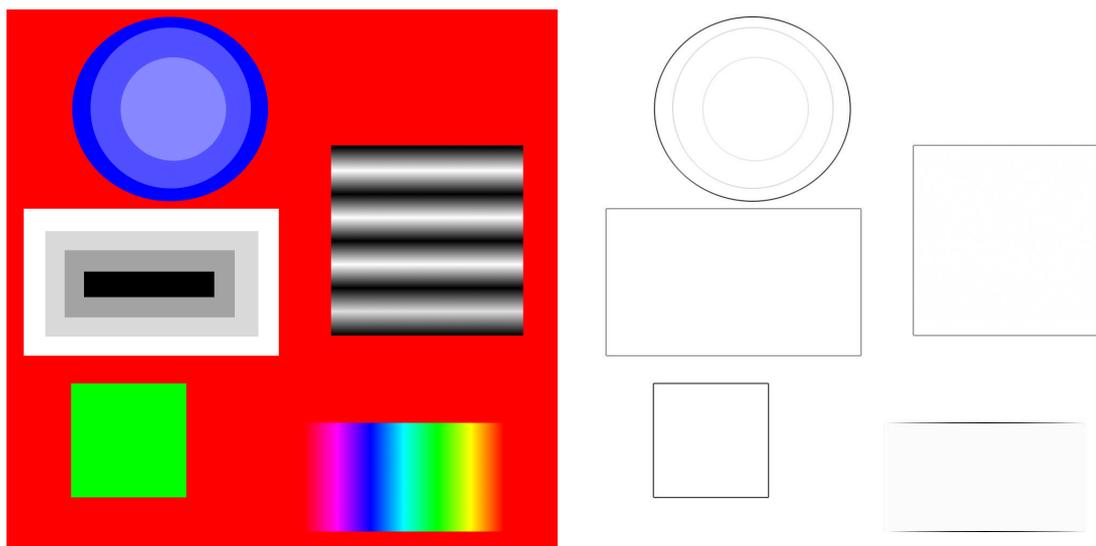


FIG. 4.24 – Image originale et résultat du gradient basé sur la saturation uniquement (inversé pour une meilleure visibilité).

pour lesquels la norme est proche de zéro, autrement dit, nous considérons que ces pixels portent l'information achromatique.

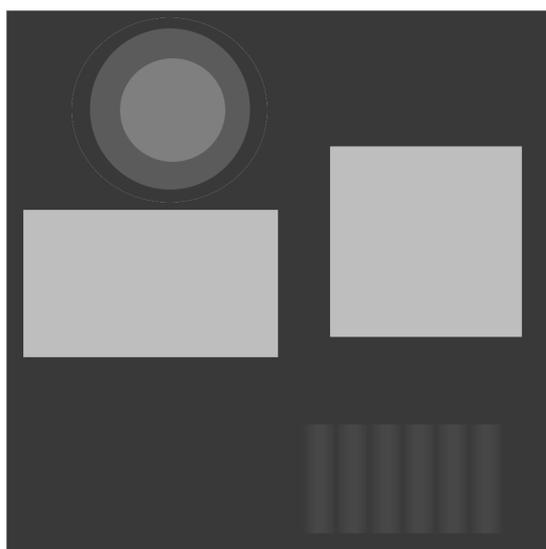


FIG. 4.25 – Norme de la partie bivectorielle (inversée pour une meilleure visibilité).

- Nous avons vu que la partie scalaire représentait la projection de l'image sur l'axe μ des niveaux de gris. On comprend donc que ce scalaire représente l'information d'intensité de l'image. C'est justement l'information qui nous manque et que nous voulons rajouter à notre gradient. Pour cela nous effectuons donc un filtrage sur la partie projection par un ensemble de filtres de Prewitt dans chacune des directions horizontale, verticale et diagonales afin d'obtenir un gradient d'intensité. Ensuite, on utilise le masque défini juste avant pour ne conserver que l'information achromatique dont on a besoin. Le résultat de cette étape est illustré par la figure 4.26.
- La dernière étape consiste à assembler ce gradient d'intensité sur les zones achromatiques de l'image au gradient de saturation défini précédemment. Pour cela, nous utilisons là encore l'opération qui consiste à garder pour chaque pixel la valeur maximum entre ces deux gradients. La figure 4.27 illustre donc le gradient final obtenu par cette méthode. Comparés au gradient précédent de

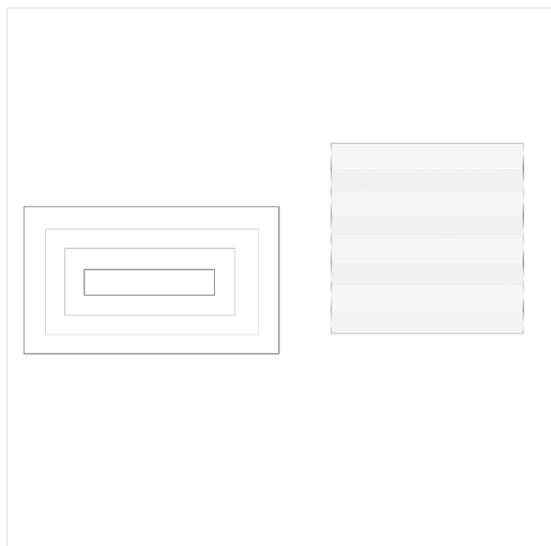


FIG. 4.26 – Gradient d'intensité masqué grâce à la norme de la bivectorielle (inversé pour une meilleure visibilité).

la figure 4.24b, les contours sont détectés aussi efficacement. Cependant là où l'ancienne méthode échouait dans la détection des contours achromatiques, la nouvelle technique permet de résoudre le problème comme nous le voyons par l'apparition de contours à l'intérieur du rectangle du centre gauche. Notons que s'il n'y a pas de contours apparents dans le carré à droite de l'image qui varie entre le blanc et le noir de façon verticale, c'est que celle-ci est en effet décrite par des dégradés et donc qu'il n'y a pas apparition de ruptures franches.

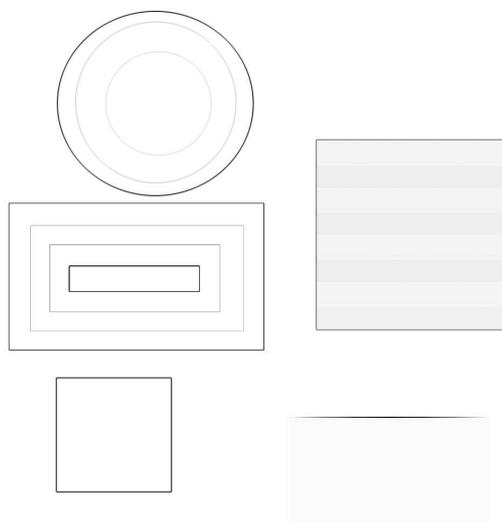


FIG. 4.27 – Gradient final (inversé pour une meilleure visibilité).

Pour conclure, nous avons mené une campagne de tests sur différentes images. La figure 4.28 résume les résultats en présentant les gradients couleur obtenus par notre méthode sur différentes images classiques en traitement d'images couleur. On remarque que l'image de synthèse permet de bien mettre en avant le fait que les contours achromatiques sont maintenant correctement détectés. Les deux images suivantes contiennent elles aussi des zones achromatiques comme les gouttières et les rebords de fenêtre pour l'image de la maison et les rayures du zèbre. Ces informations achromatiques apparaissent au niveau du gradient couleur ainsi que les autres informations chromatiques qui permettent de détecter des

contours pour lesquels l'intensité n'a pas d'importance comme c'est le cas pour l'image du babouin par exemple, qui est constituée de nombreuses textures couleur.

A partir du gradient, nous pouvons construire une carte de contours par un seuillage simple. En effet, une information de type gradient n'est décrite que sur une composante, il suffit donc de seuiller cette information en niveaux de gris pour obtenir les contours globaux de l'image. Ici encore, le seuil est déterminé de manière empirique. Les résultats sont illustrés dans la figure 4.29. Le gradient couleur de la maison (a), resp. les parrots (e), est donné en (b), resp. en (f). Les cartes de contours c et g (resp. d et h) sont obtenues par seuillage de notre gradient final (resp. du gradient de saturation). Nous remarquons que les détails de la fenêtre de la maison apparaissent nettement plus clairement avec la prise en compte de l'intensité dans (c) que dans (d) où cette information de clarté n'est pas traitée. De même, d'autres détails se distinguent avec le nouveau modèle comme les dessous de toit et les gouttières. Néanmoins les contours des ombres sont aussi détectés en (c) et un travail complémentaire pourrait être apporté par l'étude d'un gradient teinte pondéré par la saturation dans \mathcal{G}_3 . Pour l'image des parrots (g) et (h) la différence est encore plus visible car l'image contient des parties très achromatiques. Ainsi les contours sont bien plus précis au niveau des deux becs qui contiennent essentiellement des nuances de noir ou de blanc. La nouvelle méthode fait apparaître aussi de nombreux détails achromatiques au niveau de la tête de l'animal de gauche qui étaient complètement absents avec la méthode précédente (œil par exemple).

Nous avons donc proposé une méthode de traitement d'images couleur qui utilise l'algèbre géométrique \mathcal{G}_3 et dont l'intérêt réside dans la manipulation géométrique des couleurs au moyen d'opérations algébriques. Le produit géométrique utilisé notamment dans la dernière partie de la construction de notre gradient permet de comparer de manière géométrique l'ensemble des pixels de l'image. Si dans notre proposition actuelle la comparaison a été faite par rapport à l'axe des niveaux de gris, il est tout à fait possible d'envisager une comparaison des pixels avec d'autres vecteurs couleurs pour définir de nouvelles opérations réellement couleur. En effet, la partie bivectorielle associée au produit vectoriel de deux vecteurs couleur apporte de l'information géométrique notamment le plan colorimétrique qui permet de passer d'une couleur à l'autre. Ce plan de couleur est aussi associé dans le produit vectoriel à l'angle qui sépare les deux vecteurs coloriés.

4.6 Conclusion

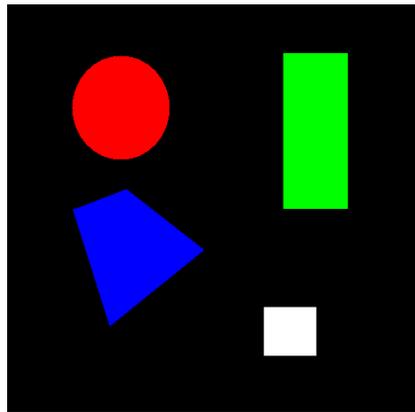
Nous avons vu que l'algèbre Géométrique \mathcal{G}_3 permet de manipuler des entités géométriques telles que des scalaires, vecteurs ou bivecteurs et cela de manière indépendante. Des règles permettent d'affecter certains objets au moyen d'autres et celles-ci sont régies par les différents produits que l'on peut rencontrer dans \mathcal{G}_3 (produits interne, externe, géométrique, mixte).

Nous avons également vu qu'il était possible d'utiliser les quaternions pour pouvoir appliquer des transformations géométriques sur des vecteurs de l'espace 3-D. Cependant, même si les opérations géométriques de base peuvent être décrites en utilisant le formalisme quaternionique, là où elles nous fournissent des résultats en termes de produits de quaternions, les opérations décrites avec les algèbres géométriques nous permettent de faire la distinction entre les différents objets manipulés, notamment la différence entre vecteurs et bivecteurs qui est complètement absente de la théorie des quaternions.

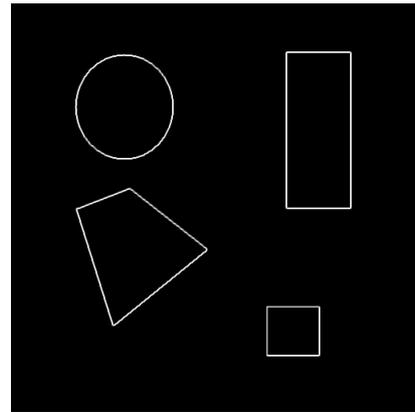
Il est donc possible d'utiliser le formalisme des algèbres géométriques pour pouvoir coder les informations de pixels de couleur au moyen de 1-vecteurs. Les algèbres géométriques permettent de définir les opérations géométriques de base telles que projections, réjections, réflexions, rotations sur et entre 1-vecteurs couleur. Il est par exemple possible d'utiliser les algèbres géométriques pour exprimer un pixel donné dans un espace RVB selon ses composantes de teinte, saturation et intensité. Ce genre de manipulation nous a permis ainsi de définir des stratégies de filtrages spatiaux définis par convolution de filtres.

Nous avons aussi proposé une transformation de Fourier Cliffordienne appliquée aux images couleur. Cette approche présente l'avantage de séparer les informations de chaque composante couleur sur deux composantes spectrales distinctes sans mélanger le contenu avec d'autres composantes couleur. En effet, les variations paires et impaires du signal spatial sont séparées pour chaque canal couleur sur les parties

vectorielle et bivectorielle du spectre. Ceci permet d'éviter le mélange des informations comme c'était le cas avec l'approche quaternionique. De plus, comme le noyau de la transformée de Fourier Cliffordienne est le pseudoscalaire, cette transformée de Fourier est équivalente à l'application de trois transformées de Fourier complexes sur chacune des composantes couleur de l'image car $e_{123}^2 = -1$.



(a)



(b)



(c)



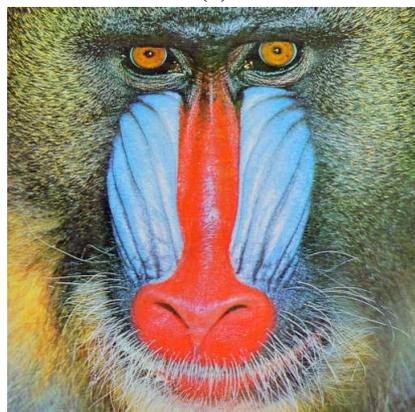
(d)



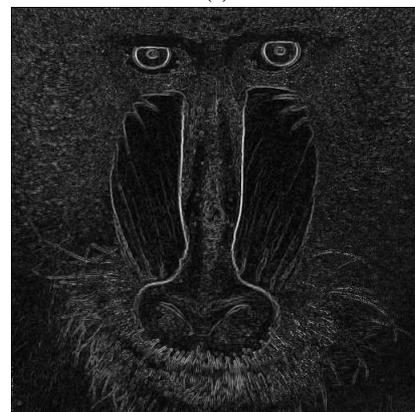
(e)



(f)



(g)



(h)

FIG. 4.28 – Exemple de gradient sur des images couleur

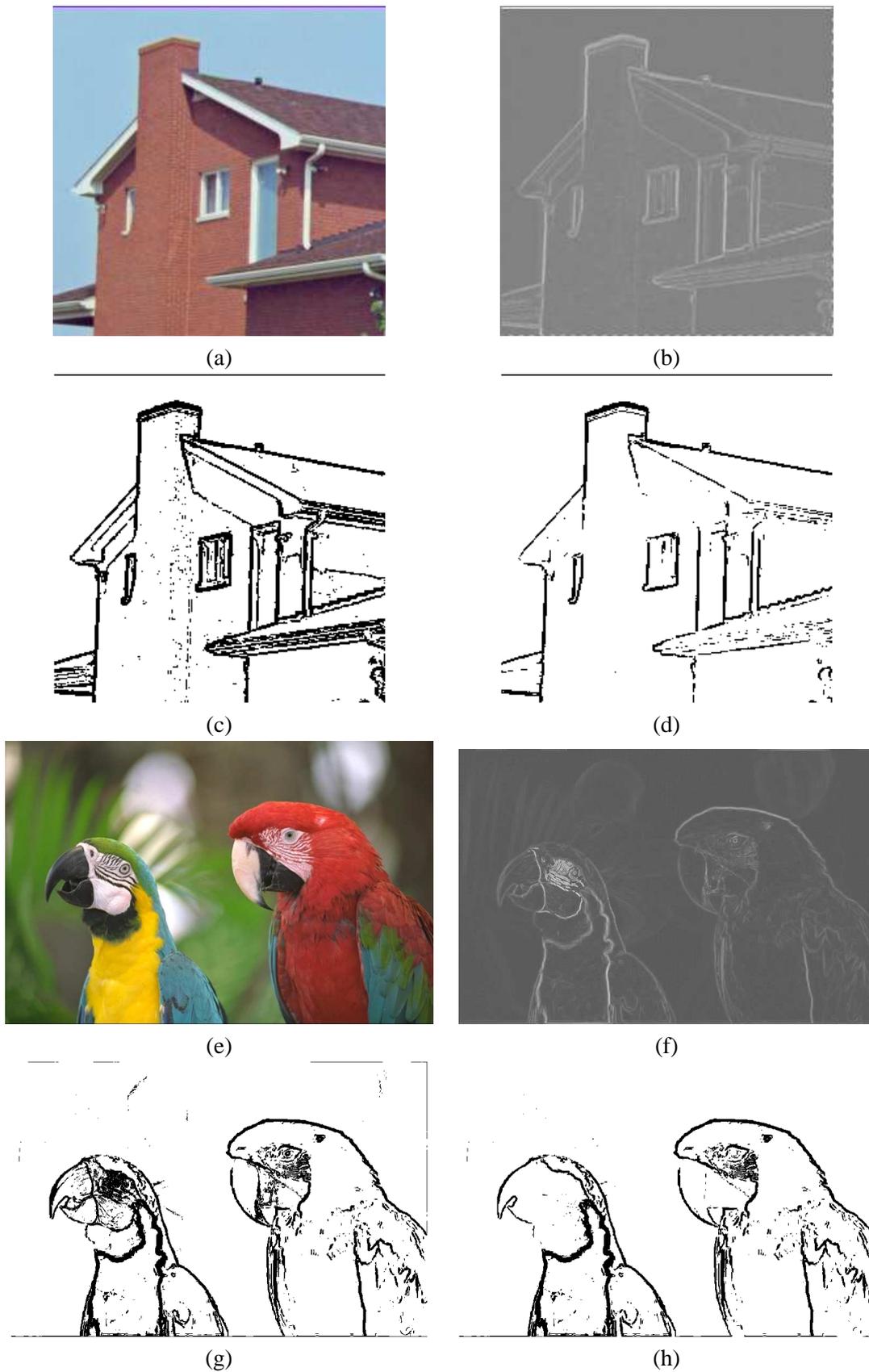


FIG. 4.29 – Exemples du gradient couleur : images maison (a) et parrots (e); résultats des gradients couleur par notre méthode (b) et (f) (réhaussement de luminosité pour plus de visibilité); différence entre un seuillage effectué sur notre gradient couleur (c) et (g) et celui n'utilisant pas l'information achromatique (d) et (h).

CONCLUSION

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'apport que l'on peut obtenir par l'utilisation de formalismes algébriques pour analyser et traiter les images numériques couleur. Dans ce cadre, nous avons vu qu'il est possible de matérialiser des vecteurs représentant l'information couleur par de simples éléments de l'algèbre utilisée. La manipulation des vecteurs couleur utilisant par exemple des produits vectoriels ou encore des produits matriciels souvent lourds à l'usage est simplifiée par l'utilisation d'opérations fondamentales simples pour manier les éléments de l'algèbre. Nous avons alors cherché à caractériser des images couleur en utilisant respectivement l'algèbre des nombres complexes, puis celle des quaternions pour finir avec l'algèbre géométrique aussi appelée algèbre de Clifford. Reprenons les différents éléments de réponse que nous avons proposés.

Dans le chapitre 2, nous avons tout d'abord effectué un rappel sur l'analyse par transformée de Fourier, élément fondamental dans la suite du document. Dans l'objectif d'étudier la possibilité d'utiliser un espace couleur pour définir une approche fréquentielle couleur, nous avons dû analyser différents espaces couleur. Notre choix s'est porté sur l'espace couleur YUV . Cet espace a été créé pour le système standard PAL de télévision et il permet la séparation de l'information d'intensité et de celle de chromaticité des couleurs. L'étape suivante a alors été de caractériser cet espace YUV afin de savoir comment se comportent les coefficients des composantes chromatiques U et V en fonction de la composante de l'intensité Y ainsi que les domaines de variation. Nous avons par exemple confirmé par des expériences numériques que la clarté Y fait bien partie de la perception de la couleur en montrant que les variations de couleurs obtenues avec les composantes U et V changeaient suivant les valeurs de la clarté. Ceci nous renforce dans notre approche nécessairement tridimensionnelle de la couleur.

Ensuite, même si l'information contenue dans un nombre complexe ne suffit pour « capter » complètement la couleur, nous avons montré que la définition d'une transformée de Fourier « chromatique » permettait d'analyser partiellement le comportement des couleurs dans un espace fréquentiel. Cette analyse nécessite la définition et la compréhension de la notion de « chemin couleur » proposée initialement par McCabe et utilisée pour décrire les variations de couleur obtenues sur des images dont le spectre a reçu une initialisation de type impulsion. Nous avons vu qu'un chemin couleur est défini dans le plan complexe formé par les composantes U et V et permet d'illustrer une variation couleur dans ce plan. Il existe de nombreux chemins couleur de base qui traduisent la notion d'opposition de couleur comme par exemple l'opposition rouge-vert ou encore l'opposition bleu-jaune qui sont deux cas particuliers de chemins décrits uniquement sur l'un des axes du plan (U, V) . Pour chaque point de l'espace fréquentiel correspond alors un chemin couleur dans le domaine spatial. Une image couleur est donc composée d'une somme d'une multitude de chemins couleur élémentaires ayant chacun leur correspondant dans l'espace des fréquences.

Pour illustrer cette approche « Fourier chromatique », nous avons défini une stratégie de filtrage fréquentiel « chromatique » sur des images couleur. Les résultats applicatifs montrent que la stratégie de filtrage fréquentiel reste cohérente même si toute l'information couleur n'est pas utilisée avec les nombres complexes.

De cette confirmation de la nature complètement tridimensionnelle de la couleur, nous avons élargi l'étude à un formalisme comportant plus de dimensions. Le chapitre 3 traite alors de l'opportunité d'utiliser les quaternions pour manipuler les images couleur. Les quaternions, contrairement aux nombres complexes, peuvent décrire complètement une information couleur par exemple sur leurs parties imaginaires. On peut alors manipuler un vecteur couleur par de simples opérations comme le produit. Nous avons ainsi vu qu'il est possible d'effectuer des transformations géométriques sur des vecteurs couleur au moyen de ce formalisme. Puis nous avons défini un détecteur de contours utilisant ce type de transformation dans une approche spatiale basée sur les travaux de Sangwine. Ce détecteur repose sur une généralisation du filtrage linéaire à l'aide du formalisme des quaternions. Un filtrage de Prewitt est effectué sur l'image d'origine en remplaçant les coefficients réels par des coefficients quaternioniques permettant de caractériser les contours couleur de l'image. Le résultat du filtrage est représenté par des vecteurs couleur qui permettent de comparer chaque pixel analysé à l'ensemble de ses voisins. Si le vecteur résultat est proche de l'axe des niveaux de gris, le pixel analysé se situe sur une zone de couleur homogène tandis que s'il s'éloigne de cet axe alors c'est qu'il fait partie d'un contour couleur. Nous avons proposé de calculer la distance de ce vecteur couleur par rapport à l'axe des niveaux de gris, diagonale du cube RVB , pour obtenir un gradient de couleur. La distance calculée correspond en fait à une mesure de saturation. Nous avons alors mis en évidence que le gradient quaternionique proposé souffre de ne pas pouvoir détecter les contours achromatiques.

Dans la seconde partie du chapitre 3, nous avons étudié les approches fréquentielles définies dans la littérature utilisant les quaternions.

- Tout d'abord l'analyse de Bülow sur les images en niveaux de gris qui permet de caractériser les structures 2D d'un signal réel grâce aux symétries présentes dans la transformée de Fourier et à la caractérisation de la généralisation du signal analytique à deux dimensions. Cette généralisation appelée signal monogénique permet d'introduire des notions de phase et d'amplitude locale pour les directions horizontales et verticales de manière indépendante.
- Ensuite, nous avons décrit l'analyse des images couleur par Sangwine et Ell. Nous avons vu que la description fréquentielle dépend de la direction de la transformée de Fourier quaternionique. En réalité, pour pouvoir analyser le contenu fréquentiel comme le font Sangwine et Ell, il faut utiliser une transformée de Fourier quaternionique ne donnant pas plus d'importance à une composante couleur qu'à une autre, autrement dit, dont la direction suit l'axe des niveaux de gris. Cette analyse alors permet de retrouver l'interprétation du spectre avec les chemins couleur donnée par McCabe dans le cas complexe.

Cependant nous avons observé, par l'étude numérique de la transformée de Fourier quaternionique, qu'il était possible d'effectuer des transformées sur des images couleur avec des directions différentes de l'axe des niveaux de gris bien qu'une interprétation de l'information spectrale obtenue par une telle direction semble difficile. Nous avons décrit le domaine de Fourier à travers des propriétés de symétrie propres à la transformée aussi bien dans le spectre que sur les images d'origines. Nous avons enfin étudié les atomes élémentaires associés à cette transformée de Fourier quaternionique en initialisant le spectre par des impulsions. L'analyse des résultats de ces initialisations spectrales nous a permis de différencier plusieurs cas de figures dans lesquels la direction de la transformée de Fourier prend plus ou moins d'importance. Cette direction d'analyse est importante lorsque le spectre contient uniquement de l'information sur la partie réelle, les variations spatiales obtenues dépendent en effet à ce moment là de la direction de la TFQ. Sinon, dès lors que les parties imaginaires du spectre sont non nulles, l'influence de la direction de la transformée de Fourier sur l'analyse couleur disparaît. Cette étude est illustrée à travers une stratégie de filtrage fréquentielle utilisant les quaternions.

Dans le chapitre 4, nous utilisons une généralisation des formalismes permettant de manipuler des entités géométriques par l'intermédiaire d'écritures algébriques à savoir les algèbres géométriques. Ces

algèbres aussi appelées algèbres de Clifford permettent d'ailleurs de généraliser ce type d'approche à un nombre de dimensions infini. Nous avons vu que les algèbres géométriques \mathcal{G}_2 et \mathcal{G}_3 permettent de manipuler des entités géométriques telles que scalaires, vecteurs, bivecteurs et trivecteurs de manière indépendante. Des règles permettent d'affecter certains objets au moyen d'autres et celles-ci sont régies par les différents produits : produits interne, externe, géométrique, mixte.

Il existe peu de travaux sur l'utilisation des algèbres géométriques dans le domaine de l'image. Nous avons tout d'abord vu comment les algèbres géométriques étaient utilisées par Felsberg pour l'analyse fréquentielle des images en niveaux de gris. Dans son approche, il utilise les algèbres géométriques pour analyser les structures locales des signaux 2D réels en séparant l'information contenue dans ces signaux 2D avec des symétries centrales.

Afin de répondre à notre problématique de caractérisation fréquentielle couleur, nous avons ensuite appliqué les travaux de Brackx et Sommen aux images couleur. Ces travaux reposent sur la définition d'une transformée de Fourier dont le noyau est défini par un produit extérieur de l'algèbre \mathcal{G}_2 . Cette définition se distingue en ce point de toutes les autres transformées de Fourier que nous avons étudiées. Malheureusement, du fait de l'algèbre \mathcal{G}_2 utilisé, nous avons constaté que cette transformée ne convient pas à une analyse globale des images couleur tout simplement car elle ne donne pas le même poids aux trois composantes couleurs : alors que les parties paires et impaires de la première composante couleur sont séparées correctement dans le spectre, celles correspondant aux deuxième et troisième composantes se retrouvent mélangées en son sein. De plus, le fait d'utiliser l'algèbre \mathcal{G}_2 ne permet pas de placer les composantes couleur sur le même grade de l'algèbre. Il n'y a en effet qu'une partie scalaire et une partie bivectorielle pour deux parties vectorielles. Ceci empêche d'effectuer des opérations géométriques que l'on pourrait utiliser dans le domaine spatial car ces opérations ne sont définies que pour des multivecteurs simples, autrement dit de même grade.

Nous avons donc utilisé les trois composantes 1-vectorielles de l'algèbre \mathcal{G}_3 pour placer les trois composantes couleur sur un multivecteur. En utilisant ce formalisme, nous avons proposé une définition d'une transformation de Fourier Cliffordienne appliquée aux images couleurs. L'étude numérique de cette transformation a mis en évidence qu'elle n'est pas directionnelle comme c'est le cas pour la transformée quaternionique. Les composantes fréquentielles couleur se séparent suivant les parties paires ou impaires sur les composantes 1-vectorielles et bi-vectorielles du spectre de manière indépendante. On retrouve donc les parties paires de la première composante couleur sur la partie vectorielle e_1 du spectre tandis que sa partie impaire se situe sur la composante duale c'est à dire la composante bivectorielle e_{23} . On constate le même phénomène pour les deux autres composantes couleur. Cette transformée de Fourier Cliffordienne qui utilise le pseudoscalaire dans le noyau est donc isomorphe à une transformée de Fourier marginale soit une transformée complexe appliquée sur chaque composante couleur.

Enfin, nous avons utilisé l'algèbre \mathcal{G}_3 dans une approche spatiale. Tout d'abord, nous avons montré qu'il est possible d'utiliser les avantages donnés par l'utilisation des produits de l'algèbre afin de décrire la géométrie entre deux 1-vecteurs couleur (car les 1-vecteurs sont par nature de même grade). On peut ainsi exprimer l'angle qui sépare deux 1-vecteurs dans le plan porté par le bivecteur qui leur est associé (obtenu par leur produit externe). L'algèbre \mathcal{G}_3 nous a également permis de définir une nouvelle approche spatiale de détection de contours en généralisant celle définie avec les quaternions. Cette approche reprend le principe du filtrage couleur basé sur un gradient de saturation auquel nous avons adjoint une partie permettant de rajouter une discrimination des contours achromatiques. Pour cela, chaque pixel couleur de l'image est comparé au 1-vecteur représentant l'axe des niveaux de gris par un produit géométrique. Ce produit géométrique se décompose en une somme de deux termes : le produit externe du pixel avec l'axe des gris et leur produit scalaire. Le produit externe nous permet de savoir à travers sa norme si le pixel est achromatique. Dans ce cas, il est conservé dans un masque que nous appliquons sur le résultat du produit scalaire qui correspond exactement à la clarté du pixel. En filtrant cette partie par un filtre de Prewitt, on obtient un gradient d'intensité qui est fusionné au gradient de saturation lorsque le pixel est achromatique. Nous obtenons ainsi un gradient efficace pour détecter les contours d'une image couleur.

Ces travaux doivent être poursuivis par la définition de nouvelles méthodes spatiales prenant plus en compte la spécificité des opérations rendues possibles par l'utilisation des algèbres géométriques ainsi que des entités manipulées. Par exemple, nous avons vu que deux 1-vecteurs peuvent être comparés par leur produit géométrique, plutôt que de les comparer entre eux par rapport à l'axe des niveaux de gris. On comparerait dans ce cas chaque pixel avec ses voisins et lorsque l'angle entre les deux ou même la norme du bivecteur leur étant associé seraient importants, nous serions en présence d'un contour. De plus l'angle et le bivecteur présentent de l'information supplémentaire dans le fait que l'angle est celui qui sépare les deux 1-vecteurs dans le plan orienté qui leur est associé. Il faudrait également étudier l'opportunité de faire ces comparaisons entre 1-vecteurs couleurs dans d'autres espaces comme les espaces antagonistes comme YC_rC_b utilisé pour la TVHD par exemple ou encore l'espace $L^*a^*b^*$ qui est perceptuellement uniforme. Les algèbres géométriques permettent aussi la formulation des notions d'union et d'intersection d'ensemble. Ces notions pourraient être utilisées également pour comparer des vecteurs couleur entre eux et donc applicables pour des filtrages d'ordre et en particulier à des opérations de morphologies mathématiques. On pourrait de même s'en servir pour agréger des vecteurs rassemblant des caractéristiques semblables dans une approche de segmentation par régions ou dans une démarche d'indexation par le contenu de bases d'images couleur. Il est également possible de définir une notion de corrélation entre vecteurs de l'algèbre ceci pourrait être utilisé pour comparer des images entre elles en détectant les mouvements ou disparitions de certains objets. On pourrait donc appliquer ceci dans des séquences vidéos en télésurveillance pour exemple d'application. Il est difficile de conclure sur l'analyse fréquentielle couleur. Les propriétés mises en évidence n'ont pas montré un potentiel applicatif. Pour cela, il nous semble nécessaire d'intégrer à l'analyse couleur l'analyse géométriques des images en deux dimensions. Cela est peut être possible en codant chaque composante couleur sur deux parties vectorielles qui seraient ensuite analysées par une transformée de Fourier permettant la séparation entre les informations horizontales et verticales. Enfin, comme les algèbres géométriques ne sont pas limitées à la dimension trois mais généralisables à n'importe quelle dimension, on est loin d'avoir fait le tour des potentialités de la représentation. Il est possible de s'en servir pour effectuer des traitements sur des images multispectrales et multicomposantes comme les images satellitaires par exemple.

ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE \mathcal{G}_2

Nous présentons tout d'abord dans cette annexe comment la transformée de Fourier définie dans le manuscrit à la section 4.3.1 peut se calculer en utilisant des FFT (cf. section A.1). Ensuite nous détaillerons les calculs nécessaires à la détermination des symétries dans le spectre d'images couleur définies par cette TFC (cf. section A.2). Enfin, nous détaillerons les calculs permettant de connaître l'influence des atomes élémentaires du spectre (cf. section A.3).

A.1 Simplification par transformées de Fourier Rapides

Pour pouvoir assurer la simplification de la transformée de Fourier par des transformées de Fourier complexes, il faut factoriser l'expression de la transformée de Fourier par l'élément de l'algèbre qui élevé au carré vaut -1 . Une telle factorisation permettrait de pouvoir ensuite calculer la transformée de Fourier Cliffordienne par une somme de transformées de Fourier complexes rapides. L'élément correspondant par isomorphisme dans l'algèbre \mathcal{G}_2 au complexe imaginaire i est e_{12} .

$$\begin{aligned} f[n, m] &= f_0[n, m]e_0 + f_1[n, m]e_1 + f_2[n, m]e_2 + f_{12}[n, m]e_{12} \\ &= f_0[n, m]e_0 + f_{12}[n, m]e_{12} + [f_1[n, m]e_0 - f_2[n, m]e_{12}]e_1 \end{aligned}$$

On calculera $F[o, p]$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F[o, p] &= \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f][o, p] = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) f[n, m] \\ &= \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) + \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right)e_{12} \right] f[n, m] \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{NM}} \exp\left(2i\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) [[f_0[n, m] + f_{12}[n, m]i] + [f_1[n, m] - f_2[n, m]i]] \\ &= \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) + \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right)i \right] \\ &\quad [[f_0[n, m] + f_{12}[n, m]i] + [f_1[n, m] - f_2[n, m]i]] \end{aligned}$$

Il est donc possible de calculer la transformée de Fourier dans \mathcal{G}_2 au moyen de deux transformées de Fourier rapides. Le terme d'équivalence n'est ici employé que pour indiquer que les coefficients seront conservés. Cependant afin de calculer entièrement la transformée de Fourier Cliffordienne il faudra finalement remplacer les i par des e_{12} et multiplier ces coefficients en fonction de la factorisation donnée ci-dessus.

A.2 Conditions d'initialisation du spectre

En reprenant la formulation de la transformée de Fourier inverse, nous avons :

$$\begin{aligned} f[n, m] = & \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[F_0[o, p] \cos \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) - F_{12}[o, p] \sin \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) \right] \\ & + \left[F_1[o, p] \cos \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) + F_2[o, p] \sin \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) \right] e_1 \\ & + \left[F_2[o, p] \cos \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) - F_1[o, p] \sin \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) \right] e_2 \\ & + \left[F_{12}[o, p] \cos \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) + F_0[o, p] \sin \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) \right] e_{12} \end{aligned}$$

il faut que $f_{12}[n, m] = 0$ pour reconstruire une image couleur.

Pour que $f_{12}[n, m] = 0$ il faut que

$$f_{12A}[n, m] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} F_{12}[o, p] \cos \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) = 0$$

pour cela il faut que $\forall(o, p) \in \left(\left[-\frac{N}{2} + 1; \frac{N}{2} \right], \left[-\frac{M}{2} + 1; \frac{M}{2} \right] \right)$, $F_{12}[o, p] = -F_{12}[-o, -p]$
et

$$f_{12B}[n, m] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} F_0[o, p] \sin \left(2\pi \left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N} \right) \right) = 0$$

pour cela il faut que $\forall(k, l) \in \left(\left[-\frac{N}{2} + 1; \frac{N}{2} \right], \left[-\frac{M}{2} + 1; \frac{M}{2} \right] \right)$, $F_0[o, p] = F_0[-k, -l]$.

Nous obtenons donc les conditions générales de symétries du spectre pour pouvoir reconstruire le signal d'une image couleur par notre transformée de Fourier inverse.

$$\forall(k, l) \in \left(\left[-\frac{N}{2} + 1; \frac{N}{2} \right], \left[-\frac{M}{2} + 1; \frac{M}{2} \right] \right)$$

$$F_0[o, p] = F_0[-k, -l]$$

$$F_{12}[o, p] = -F_{12}[-k, -l]$$

A.3 Interprétation de l'influence d'un Dirac dans le spectre

En initialisant un point dans le domaine fréquentiel par une constante, on veut interpréter le résultat obtenu dans le domaine spatial après transformée de Fourier inverse.

Il faut respecter les conditions d'initialisation données dans l'équation (4.46).

A.3.1 Initialisation sur la composante scalaire

On choisit d'insérer deux Dirac respectant la condition $F_0[k_0, l_0] = F_0[-k_0, -l_0]$ sur le spectre, en considérant le centre de l'image comme origine du repère. Les coefficients de celui-ci restent nuls ailleurs. On effectue ensuite une transformée inverse.

$$f[n, m] = \left[F_0[o_0, p_0] \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) + F_0[-o_0, -p_0] \cos \left(2\pi \left(\frac{-o_0 n}{M} - \frac{-p_0 m}{N} \right) \right) \right] \\ + \left[F_0[o_0, p_0] \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) + F_0[-o_0, -p_0] \sin \left(2\pi \left(\frac{-o_0 n}{M} - \frac{-p_0 m}{N} \right) \right) \right] e_{12}$$

comme $F_0[o_0, p_0] = -F_0[-o_0, -p_0]$ et $\forall x \in \mathbb{R} \cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$f[n, m] = 2F_0[o_0, p_0] \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) \quad (\text{A.1})$$

A.3.2 Initialisation sur la composante bivectorielle

On choisit d'insérer deux Dirac respectant la condition $F_{12}[o_0, p_0] = -F_{12}[-o_0, -p_0]$ sur le spectre nul ailleurs en considérant le centre de l'image comme origine du repère. On effectue ensuite une transformée inverse.

$$f[n, m] = \left[-F_{12}(o_0, p_0) \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) - F_{12}(-o_0, -p_0) \sin \left(2\pi \left(\frac{-o_0 n}{M} - \frac{-p_0 m}{N} \right) \right) \right] \\ + \left[F_{12}(o_0, p_0) \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) + F_{12}(-o_0, -p_0) \cos \left(2\pi \left(\frac{-o_0 n}{M} - \frac{-p_0 m}{N} \right) \right) \right] e_{12}$$

comme $F_{12}(o_0, p_0) = -F_{12}(-o_0, -p_0)$ et $\forall x \in \mathbb{R} \cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$

$$f(n, m) = -2F_{12}(o_0, p_0) \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) \quad (\text{A.2})$$

A.3.3 Initialisation sur une composante vectorielle

Il n'existe pas de condition de symétrie sur la partie vectorielle du spectre de notre transformée. Quelle est donc l'influence d'une initialisation sur l'une ou l'autre de ces deux composantes ?

- On initialise une constante sur la première partie vectorielle :

$$f(n, m) = \left[F_1(o_0, p_0) \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) \right] e_1 \\ + \left[-F_1(o_0, p_0) \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) \right] e_2$$

Il en résulte une variation spatiale paire sur la première composante et une variation impaire sur la seconde.

- Ici c'est la deuxième composante vectorielle du spectre qui est initialisée :

$$f(n, m) = \left[F_2(o_0, p_0) \sin \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) \right] e_1 \\ + \left[F_2(o_0, p_0) \cos \left(2\pi \left(\frac{o_0 n}{M} - \frac{p_0 m}{N} \right) \right) \right] e_2$$

Il en résulte une variation spatiale impaire sur la première composante et une variation paire sur la seconde.

Des informations semblent être mélangées sur les parties vectorielles du spectre.

Q'en est-il des propriétés de symétrie sur la partie vectorielle du spectre ? En effet, même si elles ne sont pas nécessaires à la reconstruction d'une image couleur par transformée inverse, peut-être des symétries existent-elles tout de même.

On redonne l'expression du spectre mais cette fois avec l'information basse fréquence centrée au milieu de l'image.

$$\begin{aligned}
F[o, p] &= \mathcal{F}_{\mathcal{H}^+}[f][o, p] = \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) f[n, m] \\
&= \frac{1}{\sqrt{NM}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) + \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) e_{12} \right] f[n, m] \\
&= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[f_0[n, m] \cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) - f_{12}[n, m] \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) \right] \\
&\quad + \left[f_1[n, m] \cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) + f_2[n, m] \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) \right] e_1 \\
&\quad + \left[f_2[n, m] \cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) - f_1[n, m] \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) \right] e_2 \\
&\quad + \left[f_{12}[n, m] \cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) + f_0[n, m] \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) \right] e_{12}
\end{aligned}$$

Première partie vectorielle

$$F_1[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[f_1[n, m] \cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) + f_2[n, m] \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) \right] e_1$$

$$\begin{aligned}
F_1[-o, -p] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[f_1[n, m] \cos\left(2\pi\left(\frac{-on}{M} - \frac{-pm}{N}\right)\right) \right. \\
&\quad \left. + f_2[n, m] \sin\left(2\pi\left(\frac{-on}{M} - \frac{-pm}{N}\right)\right) \right] e_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[f_1[n, m] \cos\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) \right. \\
&\quad \left. - f_2[n, m] \sin\left(2\pi\left(\frac{on}{M} - \frac{pm}{N}\right)\right) \right] e_1
\end{aligned}$$

d'où $F_1[o, p] \neq F_1[-o, -p]$ et aussi $F_1[o, p] \neq -F_1[-o, -p]$. Il n'existe donc pas de symétries équivalentes à celles que l'on a l'habitude d'observer sur la première partie vectorielle du spectre. On se rend compte par le même type de calculs qu'il n'existe pas non plus de symétrie particulière sur les axes horizontal et vertical dans la première partie vectorielle du spectre. Ceci est aussi le cas de la deuxième partie vectorielle. En effet on remarquera facilement que les informations contenues dans ces deux parties sont mélangées : on exprime F_1 en fonction de f_1 et f_2 et la même chose est vraie pour exprimer F_2 .

ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE \mathcal{G}_3

B.1 Simplification par transformées de Fourier rapides

Comme pour la plupart des transformées de Fourier hypercomplexes [31], [27], [55] et [24], il est possible d'effectuer la transformation de Fourier Cliffordienne couleur définie précédemment en utilisant des transformations de Fourier complexes rapides classiques. Ceci permet des temps de calculs améliorés de manière à pouvoir effectuer cette transformation sur des images numériques de façon plus aisée. La décomposition s'effectue de la façon suivante :

$$F[m, n] = F_0[m, n] + F_1[m, n]e_1 + F_2[m, n]e_2 + F_3[m, n]e_3 \\ + F_{23}[m, n]e_{23} + F_{31}[m, n]e_{31} + F_{12}[m, n]e_{12} + F_{123}[m, n]e_{123}$$

en utilisant les propriétés du produit cette relation est équivalente à la suivante :

$$f[m, n] = [f_0[m, n] + f_{123}[m, n]e_{123}]1 \\ + [f_1[m, n] + f_{23}[m, n]e_{123}]e_1 \\ + [f_2[m, n] + f_{31}[m, n]e_{123}]e_2 \\ + [f_3[m, n] + f_{12}[m, n]e_{123}]e_3$$

Nous voyons apparaître ici que la fonction f est isomorphe à l'ensemble \mathbb{C}^4 donc comme la transformée de Fourier est une application linéaire nous pouvons alors décomposer la transformée de Fourier couleur suivant les différentes composantes de notre algèbre en quatre transformées de Fourier complexes en remplaçant l'élément e_{123} par le complexe imaginaire pur i .

$$F[o, p] = F\{f[m, n]\}[o, p] \\ = [F\{f_0[m, n] + f_{123}[m, n]e_{123}\}[o, p]]1 \\ + [F\{f_1[m, n] + f_{23}[m, n]e_{123}\}[o, p]]e_1 \\ + [F\{f_2[m, n] + f_{31}[m, n]e_{123}\}[o, p]]e_2 \\ + [F\{f_3[m, n] + f_{12}[m, n]e_{123}\}[o, p]]e_3$$

B.2 Calcul numérique de la transformée de Fourier

Ici nous allons expliquer comment se fait le calcul numérique de la transformée de Fourier pour une image couleur. Soit une image i de longueur N et de largeur M , elle sera représentée numériquement par une matrice de dimension $N \times M$. Chaque pixel de cette image sera codé par un multivecteur dans lequel sera stockée l'information de couleur suivant le principe suivant :

$$F[o, p] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{M-1} f[m, n] \exp^{-2\pi e_{123} \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right)}$$

Ici m et n représentent donc les coordonnées du pixel au sein de la matrice. On découpe donc l'information couleur du pixel f de coordonnées m et n en trois composantes rouge $r[m, n] = f_1[m, n]$, verte $v[m, n] = f_2[m, n]$ et bleue $b[m, n] = f_3[m, n]$.

$$\begin{aligned} F[o, p] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f[m, n] \exp^{-2\pi e_{123} \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_1[m, n] e_1 \exp^{-2\pi e_{123} \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right)} \\ &\quad + f_2[m, n] e_2 \exp^{-2\pi e_{123} \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right)} + f_3[m, n] e_3 \exp^{-2\pi e_{123} \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{n=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} f_1[m, n] e_1 \left[\cos \left(-2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) + \sin \left(-2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) e_{123} \right) \right] \\ &\quad + f_2[m, n] e_2 \left[\cos \left(-2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) + \sin \left(-2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) e_{123} \right) \right] \\ &\quad + f_3[m, n] e_3 \left[\cos \left(-2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right) + \sin \left(-2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) e_{123} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} [f_1[m, n] e_1 + f_2[m, n] e_2 + f_3[m, n] e_3] \cos \left[-2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \\ &\quad + [f_1[m, n] e_{23} + f_2[m, n] e_{31} + f_3[m, n] e_{12}] \sin \left[-2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} [f_1[m, n] e_1 + f_2[m, n] e_2 + f_3[m, n] e_3] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \\ &\quad + [-f_1[m, n] e_{23} - f_2[m, n] e_{31} - f_3[m, n] e_{12}] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \end{aligned}$$

B.3 Calcul numérique de la transformée de Fourier inverse

Il est également possible de développer l'expression de la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}
f[m, n] &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} F[o, p] \exp^{2\pi e_{123} \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} F[o, p] \left[\cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] e_{123} \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[\cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] [F_0[o, p] + F_1[o, p]e_1 + \dots + F_{123}[o, p]e_{123}] \right. \\
&\quad \left. + \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] [F_{123}[o, p]e_{123} + F_1[o, p]e_{23} + F_2[o, p]e_{31} + F_3[o, p]e_{12} \right. \\
&\quad \left. - F_{23}[o, p]e_1 - F_{31}[o, p]e_2 - F_{12}[o, p]e_3 - F_{123}[o, p]] \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[F_0[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{123}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] \\
&\quad + \left[F_1[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{23}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_1 \\
&\quad + \left[F_2[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{31}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_2 \\
&\quad + \left[F_3[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{12}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_3 \\
&\quad + \left[F_{23}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_1[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{23} \\
&\quad + \left[F_{31}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_2[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{31} \\
&\quad + \left[F_{12}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_3[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{12} \\
&\quad + \left[F_{123}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_0[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{123}
\end{aligned}$$

B.4 Conditions d'initialisation du spectre

En reprenant la formulation de la transformée de Fourier inverse, nous avons :

$$\begin{aligned}
f[m, n] = & \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \left[F_0[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{123}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] \\
& + \left[F_1[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{23}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_1 \\
& + \left[F_2[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{31}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_2 \\
& + \left[F_3[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] - F_{12}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_3 \\
& + \left[F_{23}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_1[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{23} \\
& + \left[F_{31}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_2[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{31} \\
& + \left[F_{12}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_3[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{12} \\
& + \left[F_{123}[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] + F_0[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] \right] e_{123}
\end{aligned}$$

il faut que $f_0[m, n] = f_{23}[m, n] = f_{31}[m, n] = f_{12}[m, n] = f_{123}[m, n] = 0$.

Pour que $f_0[m, n] = 0$ il faut que

$$f_{0A}[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} F_0[o, p] \cos \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] = 0$$

pour cela il faut que $\forall(o, p) \in [-\frac{M}{2} + 1; \frac{N}{2} + 1]^2$, $F_0[o, p] = -F_0[-o, -p]$

et

$$f_{0B}[m, n] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{o=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \sum_{p=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} -F_{123}[o, p] \sin \left[2\pi \left(\frac{om}{M} + \frac{pn}{N} \right) \right] = 0$$

pour cela il faut que $\forall(o, p) \in [-\frac{M}{2} + 1; \frac{N}{2} + 1]^2$, $F_{123}[o, p] = F_{123}[-o, -p]$

En appliquant le même raisonnement pour annuler les autres composantes de $f[o, p]$ mis à part ses composantes vectorielles, nous obtenons $\forall(o, p) \in [-\frac{M}{2} + 1; \frac{N}{2} + 1]^2$:

$$\begin{aligned}
f_{23}[m, n] = 0 & \Leftrightarrow F_{23}[o, p] = -F_{23}[-o, -p] \text{ et } F_1[o, p] = F_1[-o, -p] \\
f_{31}[m, n] = 0 & \Leftrightarrow F_{31}[o, p] = -F_{31}[-o, -p] \text{ et } F_2[o, p] = F_2[-o, -p] \\
f_{12}[m, n] = 0 & \Leftrightarrow F_{12}[o, p] = -F_{12}[-o, -p] \text{ et } F_3[o, p] = F_3[-o, -p] \\
f_{123}[m, n] = 0 & \Leftrightarrow F_{123}[o, p] = -F_{123}[-o, -p] \text{ et } F_0[o, p] = F_0[-o, -p]
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc les conditions générales de symétries du spectre pour pouvoir reconstruire le signal d'une image couleur par notre transformée de Fourier inverse.

$$\forall(o, p) \in [-\frac{M}{2} + 1; \frac{N}{2} + 1]^2$$

$$\begin{aligned}
F_0[o, p] &= 0 \\
F_1[o, p] &= F_1[-o, -p] \\
F_2[o, p] &= F_2[-o, -p] \\
F_3[o, p] &= F_3[-o, -p] \\
F_{23}[o, p] &= -F_{23}[-o, -p] \\
F_{31}[o, p] &= -F_{31}[-o, -p] \\
F_{12}[o, p] &= -F_{12}[-o, -p] \\
F_{123}[o, p] &= 0
\end{aligned}$$

B.5 Interprétation de l'influence d'un Dirac dans le spectre

Dans l'étude suivante nous essayons de caractériser le contenu de l'information fréquentielle comprise dans l'espace fréquentiel. Pour cela, nous étudions comme précédemment l'influence de l'initialisation d'un Dirac (constante), respecter les conditions d'initialisation données par l'équation (4.62), dans le domaine fréquentiel sur une image (domaine spatial obtenu après transformée de Fourier inverse).

B.5.1 Initialisation sur une composante vectorielle

On choisit d'insérer deux Diracs respectant la condition $F_1[o_0, p_0] = F_1[-o_0, -p_0]$ sur le spectre nul ailleurs en considérant le centre de l'image comme origine du repère. On effectue ensuite une transformée inverse.

$$\begin{aligned}
f(m, n) &= \left[F_1[o_0, p_0] \cos \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] + F_1[-o_0, -p_0] \cos \left[2\pi \left(\frac{-o_0 m}{M} + \frac{-p_0 n}{N} \right) \right] \right] e_1 \\
&\quad + \left[F_1[o_0, p_0] \sin \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] + F_1[-o_0, -p_0] \sin \left[2\pi \left(\frac{-o_0 m}{M} + \frac{-p_0 n}{N} \right) \right] \right] e_{23}
\end{aligned}$$

comme $F_1[o_0, p_0] = F_1[-o_0, -p_0]$ et $\forall m \in \mathbb{R} \cos(-m) = \cos(m)$ et $\sin(-m) = -\sin(m)$

$$f(m, n) = 2F_1[o_0, p_0] \cos \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] e_1$$

On en déduit par le même raisonnement que l'on obtient le même type de variation en initialisant le spectre sur la deuxième ou la troisième composante vectorielle

En initialisant sur la deuxième composante vectorielle ($F_2[o_0, p_0] = F_2[-o_0, -p_0]$), on obtient une variation de la forme :

$$f(m, n) = 2F_2[o_0, p_0] \cos \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] e_2$$

Et enfin en initialisant sur la troisième composante vectorielle ($F_3[o_0, p_0] = F_3[-o_0, -p_0]$), on obtient une variation de la forme :

$$f(m, n) = 2F_3[o_0, p_0] \cos \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] e_3$$

B.5.2 Initialisation sur une composante bi-vectorielle

On choisit d'insérer deux Diracs respectant la condition $F_{23}[o_0, p_0] = -F_{23}[-o_0, -p_0]$ sur le spectre nul ailleurs en considérant le centre de l'image comme origine du repère. On effectue ensuite une transformée inverse.

$$f(m, n) = \left[-F_{23}[o_0, p_0] \sin \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] - F_{23}[-o_0, -p_0] \sin \left[2\pi \left(\frac{-o_0 m}{M} + \frac{-p_0 n}{N} \right) \right] \right] e_1 \\ + \left[F_{23}[o_0, p_0] \cos \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] + F_{23}[-o_0, -p_0] \cos \left[2\pi \left(\frac{-o_0 m}{M} + \frac{-p_0 n}{N} \right) \right] \right] e_{23}$$

comme $F_{23}[o_0, p_0] = -F_{23}[-o_0, -p_0]$ et $\forall m \in \mathbb{R} \cos(-m) = \cos(m)$ et $\sin(-m) = -\sin(m)$

$$f(m, n) = -2F_{23}[o_0, p_0] \sin \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] e_1$$

On utilise le même raisonnement pour obtenir l'influence de l'initialisation du spectre par un couple de Dirac sur la deuxième composante bi-vectorielle $F_{31}[o_0, p_0] = -F_{31}[-o_0, -p_0]$ après transformée de Fourier inverse :

$$f(m, n) = -2F_{31}[o_0, p_0] \sin \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] e_2$$

De même pour l'initialisation du spectre sur la troisième composante bi-vectorielle $F_{12}[o_0, p_0] = -F_{12}[-o_0, -p_0]$:

$$f(m, n) = -2F_{12}[o_0, p_0] \sin \left[2\pi \left(\frac{o_0 m}{M} + \frac{p_0 n}{N} \right) \right] e_3$$

TRANSFORMÉE EN ONDELETTE QUATERNIONIQUE

Nous joignons ici comme indiqué à la section 3.5.3.2 une copie de l'article rédigé au sein de l'équipe définissant une première approche d'ondelettes couleur en utilisant la technique des bancs de filtres. J'ai présenté cet article invité à la conférence « Wavelet Applications in Industrial Processing IV », à Boston, Massachusetts, USA en octobre 2006.

Quaternionic Wavelet Transform for Colour Images

Philippe Carré and Patrice Denis

Quaternionic Wavelet Transform (QWT) already exist but it dealt with greyscale images. In this paper we propose a quaternionic wavelet transform aimed to colour image processing. To encode colour information in our new transformation, a pixel in the spatial domain is represented by a quaternion as described by Sangwine. First, we propose to use the discrete quaternionic Fourier transform to study the spectral information of the colour image. It is well known that the frequency space of a real signal is a complex hermitian signal, we then studied the digital spectral domain of the quaternionic Fourier transform in order to analyze symmetry properties. This study gives us one characterization of the colour Fourier domain. Second we use the quaternion formalism to define a wavelet transform for colour images. We propose to generalize the filter bank construction to quaternionic formalism. Especially, we describe conditions on quaternionic filters to obtain a perfect reconstruction. We build a first colour quaternionic filter bank : the colour Shannon Wavelet. This family of functions are based on a windowing process in the quaternionic Fourier space.

C.1 Introduction

Nowadays, as multimedia devices and internet are becoming accessible to more and more people, image processing must take colour information into account because colour processings are needed everywhere with new technologies. In this idea, several approaches have been proposed to deal with colour image, one of the oldest is to process any greyscale algorithm on each channel of the colour image to get the equivalent result. Implementing such programs often creates artefacts so researchers have come to deal differently with colour image information. A quite recent manner to process colour algorithms is to

encode the three channels components on the three imaginary parts of a quaternion as proposed by S.T. Sangwine and T. Ell in [63, 65, 50]. Quaternion have been used in the frequential domain for both greyscale images by Bülow [8] and colour ones by Sangwine et al. [65]. Introduction of quaternionic Fourier transforms has been made independendly by both of the teams above but in different definitions. We first review the concepts of quaternions. Then introducing the discrete quaternionic Fourier transform proposed again by Sangwine and Ell as well by Bülow for greyscale image processing, we define the conditions on the quaternionic spectrum to enable manipulation into this frequency domain without loosing information when going back to the spatial domain. This is the subject of the next section which gives an interpretation of the influence of Dirac initialization in the quaternionic Fourier space and follows with graphical illustrations. The second part introduces a quaternionic filter bank, a tool that allows to analyze colour image with the classical discrete wavelet transform algorithm. First we generalize to quaternions domain the two filters conditions to obtain a perfect reconstruction. We show that these conditions are similar to the complex case. Second, we propose a simple construction of a colour filter bank : the Shannon Quaternionic multiresolution which approximates functions by their restriction to differents frequency intervals. We illustrate this new "wavelet decomposition" on different colour images.

C.2 Quaternion

C.2.1 Definition

Definition 1 (Quaternion) Let $\mathbb{H} = \{a + ib + jc + kd \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ with i, j, k defined by $ij = -ji = k$ and $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ \mathbb{H} is called the Quaternion algebra.

\mathbb{H} refers to Hamilton[36] who was first to introduce these numbers.

Definition 2 (Conjugate) For any quaternion $q = a + ib + jc + kd$ $\bar{q} = a - ib - jc - kd$ is the conjugate of q .

Definition 3 (Norm) For any quaternion $q \in \mathbb{H}$ $|q| = \sqrt{q\bar{q}}$ is the norm of q .

Definition 4 (Inverse) For any quaternion $q \in \mathbb{H}$ $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ is the inverse of q .

Note that the multiplication of quaternions is not commutative.

Definition 5 (Real and Imaginary parts) For any quaternion $q = a + ib + jc + kd$ we sometimes write

- $\Re q = a$ is the real part of q . If $\Re q = q$ then q is called real.
- $\Im q = ib + jc + kd$ is the imaginary part of q . If $\Im q = q$ then q is pur.

Definition 6 (Pur Quaternions) $\mathbb{P} = \{q \in \mathbb{H} \mid q = \Im q\}$ is called the set of Pur Quaternions.

Definition 7 (Unit Quaternions) $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ is called the set of Unit Quaternions.

Quaternion can be expressed in a scalar $S(q)$ and vector part $V(q)$, $q = S(q) + V(q)$ with $S(q) = q_r$ and $V(q) = q_i i + q_j j + q_k k$. Sangwine and Ell were the first to use this vector part of quaternion to encode colour images. They took the three imaginary parts to code the colour components r, g and b of an image. An $N \times M$ image I is in this way represented by a $N \times M$ matrix as follow :

$$q[n_1, n_2] = r[n_1, n_2]i + g[n_1, n_2]j + b[n_1, n_2]k$$

where n_1 and n_2 are the spatial coordinates of the pixel I .

As quaternion are used analogously to \mathbb{R}^3 vectors, the classical \mathbb{R}^3 transformations can be defined with only additions and multiplications.

In order to introduce the frequency domain, we must define the exponential function for the quaternions.

Definition 8 The exponential function for quaternions is classically defined by $\exp(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q^n}{n!}$ with $q \in \mathbb{H}$.

The Euler formula is valid with $\mu \in (\mathbb{S} \cap \mathbb{P})$ a pur unit quaternion : $e^{\mu\phi} = \cos \phi + \mu \sin \phi$. A unit quaternion allows us to represent one axis and one angle.

Property 9 Let $(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2$ et $(\mu, \nu) \in (\mathbb{S} \cap \mathbb{P})^2$.

1. $e^{\mu\phi} e^{\mu\psi} = e^{\mu(\phi+\psi)}$
2. Important fact : the classical property $e^\mu e^\nu = e^{\mu+\nu}$ is not generally true for quaternions, and consequently $e^\mu e^\nu \neq e^\nu e^\mu$

C.2.2 Frequency analysis : the Quaternionic Fourier Transform.

Differents works introduced the quaternionic Fourier Transform [8, 65]. We review directly the Discrete version of the Quaternion Fourier Transform.

Definition 10 Let $N \in \mathbb{N}$, $s \in \mathcal{L}^2([0..N-1], \mathbb{H})$ and $\mu \in \mathbb{P} \cap \mathbb{S}$, then the function defined by

$$\forall f \in [0..N-1], F_\mu(s)[f] = S[f] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-2\pi\mu \frac{fn}{N}}$$

is called the 1-D Discrete Quaternionic Fourier Transform of s with a direction μ .

We can defined a two dimensional Discrete Quaternionic Fourier Transform. The main works in the litterature about the quaternionic Fourier transform are associated with the 2-D transform to define a tool for greyscale image processing [8, 65, 55].

Definition 11 Let $(N, M) \in (\mathbb{N})^2$, $s \in \mathcal{L}^2([0..N-1] \times [0..M-1], \mathbb{H})$ and $(\mu, \nu) \in (\mathbb{P} \cap \mathbb{S})^2$, the function defined by $\forall (f_1, f_2) \in [0..N-1] \times [0..M-1]$,

$$F_\mu^l(s)[f_1, f_2] = \sum_{n_1=0}^{M-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} e^{-2\pi\mu(\frac{n_2 f_2}{N} + \frac{n_1 f_1}{M})} s[n_1, n_2]$$

is called the 2-D Left Discrete Quaternionic Fourier Transform of s with a direction μ .

Since the classical property $e^\mu e^\nu = e^{\mu+\nu}$ is not generally true for quaternion, others Fourier transform can be defined. For example, Bülow [8] introduces a Quaternionic Fourier Transform for the real valued 2-D function that permits one the analysis of separable oscillations :

Definition 12 Let $(N, M) \in (\mathbb{N})^2$, $s \in \mathcal{L}^2([0..N-1] \times [0..M-1], \mathbb{H})$ and $(\mu, \nu) \in (\mathbb{P} \cap \mathbb{S})^2$, the function defined by $\forall (f_1, f_2) \in [0..N-1] \times [0..M-1]$,

$$F^{l-r}(s)[f_1, f_2] = \sum_{n_2=0}^{M-1} \sum_{n_1=0}^{N-1} e^{-2\pi\mu \frac{f_2 n_2}{M}} s[n_1, n_2] e^{-2\pi\nu \frac{f_1 n_1}{N}} \quad (\text{C.1})$$

is the Discrete Quaternionic Fourier Transform of s proposed by Bülow et al.

All these transforms are invertible.

As shown by Bülow, the last definition of the QFT allows us for greyscale image to study all the symmetry properties with independently in n_1 and n_2 . For example, if we split a real valued 2-D signal into even and odd parts along the two axis :

$$s[n_1, n_2] = s_{ee}[n_1, n_2] + s_{eo}[n_1, n_2] + s_{oe}[n_1, n_2] + s_{oo}[n_1, n_2]$$

where s_{eo} denotes the part of s which is even with respect to n_1 and odd with respect to n_2 . The Bülow Quaternionic Fourier transform of the 2-D signal can be summarized by :

$$S[f_1, f_2] = S_{ee}[f_1, f_2] + i.S_{oe}[f_1, f_2] + j.S_{eo}[f_1, f_2] + k.S_{oo}[f_1, f_2]$$

This expression shows that the Bülow QFT recovers separate parity structures in n_1 and n_2 as it separately records four real values. To conclude, as said by Bülow, contrary to the classical complex Fourier transform where the basis function are intrinsically one dimensional, the basis function of the QFT are intrinsically 2-D. The work of Bülow is the beginning of all the actual definitions of quaternionic wavelet transforms.

In this work, the context is different : we search a tool for the processing of Quaternion-valued 2-D signal (colour image). Here, the quaternion algebra is not used to extract the 2-D image structures but to analyze vector-valued signals. It is a direct generalization of the 2-D complex Fourier analysis : the spatial problem is omitted (the different parity structures along the two axis are mixed) but the Fourier transform is adapted for vector-valued signal.

C.3 Colour quaternion spectrum properties

In order to understand what the Fourier coefficients stand for, we study the digital characterization of the DQFT.

As we saw, different works introduced the quaternionic Fourier Transform [8, 65], we propose to use the left version of the Discrete Quaternion Fourier Transform (DQFT) in $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ direction analysis :

$$Q[f_1, f_2] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{M-1} \exp^{-2\mu\pi\left(\frac{f_1 n_1}{N} + \frac{f_2 n_2}{M}\right)} q[n_1, n_2]$$

and in order to simplify some analysis, we compute the expression for $[f_1, f_2] \in \left([\frac{-N}{2} + 1.. \frac{N}{2}], [\frac{-M}{2} + 1.. \frac{M}{2}]\right)$.

C.3.1 Spectrum analysis

Even if the spatial information of a colour image uses pur quaternions only, applying a DQFT on an image results in full quaternions (i.e. with scalar part non zero). We first discovered that the Fourier spectrum presents some symetries due to zero scalar spatial part of any colour image. These properties of the Quaternion spectrum are equivalent to the spectrum of a real signal analyzed by a complex Fourier transform : the spectrum has hermitian properties of symmetry. In this section we find the quaternionic spectrum's properties leading to a spatial quaternionic domain after an inverse DQFT (IDQFT) where the scalar part is zero.

C.3.1.1 The real part's cartesian form

We want to find, after IDQFT, a set where scalar part will be zero in order to avoid any loss of information because the spatial image is coded on a pur quaternion matrix which real part is automatically set to zero.

Let

$$Q[f_1, f_2] = Q_r[f_1, f_2] + Q_i[f_1, f_2]i + Q_j[f_1, f_2]j + Q_k[f_1, f_2]k$$

be the spectral quaternion at coordinate $[f_1, f_2] \in \left([\frac{-N}{2} + 1.. \frac{N}{2}], [\frac{-M}{2} + 1.. \frac{M}{2}]\right)$ and

$$q[n_1, n_2] = q_r[n_1, n_2] + q_i[n_1, n_2]i + q_j[n_1, n_2]j + q_k[n_1, n_2]k$$

the IDQFT quaternion at $[n_1, n_2]$ spatial coordinates.

Developping the IDQFT, the cartesian real part form of the spatial domain leads to

$$\Re q = q_r[n_1, n_2] = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{f_1=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{f_2=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \left[\cos\left(2\pi \left(\frac{f_1 n_1}{N} + \frac{f_2 n_2}{M}\right)\right) Q_r[f_1, f_2] \right. \\ \left. - \mu_i \sin\left(2\pi \left(\frac{f_1 n_1}{N} + \frac{f_2 n_2}{M}\right)\right) Q_i[f_1, f_2] - \mu_j \sin\left(2\pi \left(\frac{f_1 n_1}{N} + \frac{f_2 n_2}{M}\right)\right) Q_j[f_1, f_2] - \mu_k \sin\left(2\pi \left(\frac{f_1 n_1}{N} + \frac{f_2 n_2}{M}\right)\right) Q_k[f_1, f_2] \right]$$

with $\mu = \mu_i \cdot i + \mu_j \cdot j + \mu_k \cdot k \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$.

We observe that q_r is null when Q has anti-hermitian properties of symmetry :

$$Q_r(-f_1, -f_2) = -Q_r(f_1, f_2); \quad Q_i(-f_1, -f_2) = Q_i(f_1, f_2); \quad Q_j(-f_1, -f_2) = Q_j(f_1, f_2); \quad Q_k(-f_1, -f_2) = Q_k(f_1, f_2)$$

We will see in the next section how these properties are important for the interpretation of the quaternionic Fourier transform because any initialization on the spectrum must obey to them if we want to keep the spatial information safe.

C.3.1.2 How a spectrum Dirac interferes with the spatial domain

When studying the complex spectrum domain, several notions are helpfull as the modulus and the angle. In this section we give an interpretation of the information contained in the quaternionic spectrum of colour images. We thus initialize the spectrum with a Dirac and studied the response in the spatial domain after a IDQFT. But the spectrum must present anti-hermitian properties of symmetry in order to obtain a spatial image after IQFT without loss of information. There are different cases for initialization

– *Initialization on the real component*

In this case the initialization must be made with the $Q_r(S_0, T_0) = K_r$ and $Q_r(-S_0, -T_0) = -K_r$ conditions

$$q[n_1, n_2] = 0 + 2K_r \sin\left(2\pi \left(\frac{S_0 n_1}{N} + \frac{T_0 n_2}{M}\right)\right) \cdot (\mu_i + \mu_j + \mu_k)$$

Initializing the real part of the spectrum with the proper conditions leads to assume zero real part after IDQFT and discover that the three imaginary components associate odd variations for each corresponding colour component channel ponderated by the analysing direction μ chosen in the IDQFT.

– *Initialization on an imaginary component*

In this case the initialization must be made with the $Q_e(S_0, T_0) = Q_e(-S_0, -T_0) = K_e$ (with $e = i$ or j or k) condition so after IDQFT the spatial image corresponding to e-imaginary component is represented on its following cartesian form

$$q[n_1, n_2] = 0 + 2K_e \cos\left(2\pi \left(\frac{S_0 n_1}{N} + \frac{T_0 n_2}{M}\right)\right) \cdot \mu_e$$

with $e = i$ or j or k according to the initialization.

In these cases, initializing any imaginary part of the spectrum with the proper conditions supplies the real zero component after inverse transform and shows that there is even variations on the imaginary components corresponding to the one which has been initialised in the spectrum. We observe that the analysing direction μ chosen in the IDQFT has no influence.

C.3.2 Graphical Illustration

C.3.2.1 Initialization on a spectrum's imaginary part with any $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$

As we saw in the previous section, to set a pair of constants that follow the necessary conditions on one imaginary component of the quaternionic spectrum leads to a spatial oscillation on the same component after processing a IDQFT. For example if the initialization is done on the first frequency

component, the spatial oscillation that will arise from the IDQFT will be on the first spatial component coding the image, that is to say the red channel if working in RGB colour space. The initialization can be done on several components, in that case, the result will affect the same components that would have been modified. In our case as the following example are taken from a RGB colour space, multiple initializations (always under the conditions for correct spatial reconstruction) on the spectrum will produce spatial oscillation following the rules of the additive synthesis of the colour. The μ parameter does not interfere in this case. Some experimentations are done in figure C.1.

If we initialize the spectrum on each imaginary component with the same couple of constants, the spatial result after IDQFT on a RGB colour space will be a grey oscillation.

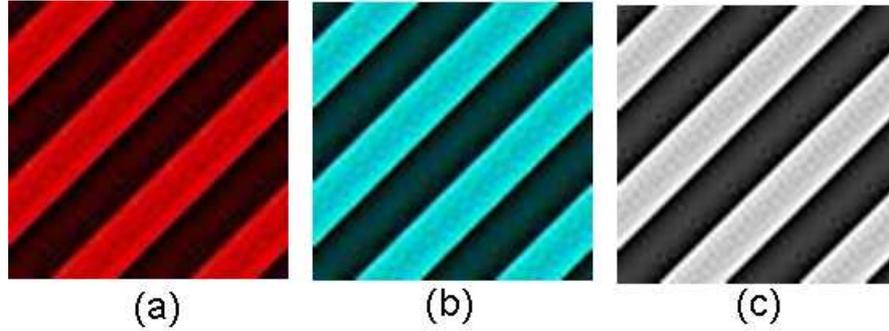


FIG. C.1 – Initialization examples with $\mu = \mu_{Grey}$. (a) : init with $\mu_{Grey} Q_i[f_1, f_2] = K_i$ et $Q_i[-f_1, -f_2] = K_i$; (b) : init with $\mu_{Grey} Q_j[f_1, f_2] = K_j, Q_k[f_1, f_2] = K_k, Q_j[-f_1, -f_2] = K_j$ and $Q_k[-f_1, -f_2] = K_k$; (c) : initialization with $\mu_{Grey} Q_i[f_1, f_2] = K_i, Q_j[f_1, f_2] = K_j, Q_k[f_1, f_2] = K_k, Q_i[-f_1, -f_2] = K_i, Q_j[f_1, f_2] = K_j$ and $Q_k[-f_1, -f_2] = K_k$ where $\mu_{Grey} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ the grey vector which gives the same weight on each component.

C.3.2.2 Initialization on the spectrum's real part with any $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$

We saw as well in the calculus part that initialization on the spectrum could be done on the real component. In that case we can also get different kinds of oscillation after processing a IDQFT assuming that the conditions proposed before are preserved. To get oscillation on a wanted component, the IQFT has to been set with th direction μ that corresponds. In other words, if working in RGB colour space for example, to get red oscillation, the μ parameter must be equal to the corresponding quaternion component i . Oscillations composed of numerous colours can be found in setting the μ parameter properly, as $\frac{i+j}{\sqrt{2}}$ the get yellow variation in the RGB colour space after IDQFT. Some experimentations are done in figure C.2.

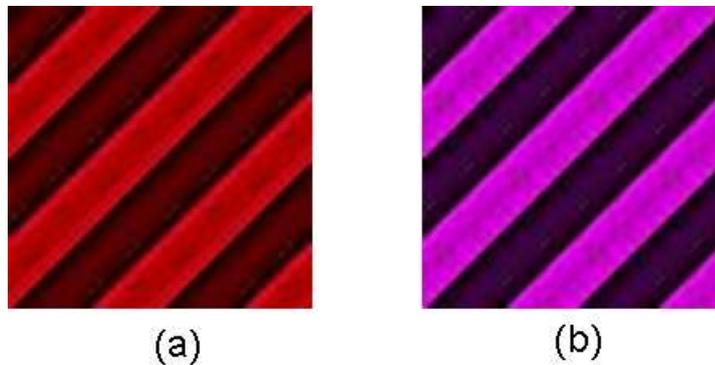


FIG. C.2 – Initialization examples with $\mu \neq \mu_{Grey}$. (a) : init with $\mu_{Red} = i, Q_r[f_1, f_2] = K_r$ and $Q_r[-f_1, -f_2] = -K_r$; (b) : init with $\mu_{Magenta} = \frac{i+k}{\sqrt{2}}, Q_r[f_1, f_2] = K_r$ and $Q_r[-f_1, -f_2] = -K_r$

C.3.2.3 Geometric Variations

As in the complex plan, coordinates of the pixels involved in the quaternionic Fourier space's initialization is a really important parameter. Indeed the resulting oscillation by the IDQFT process will have a geometric orientation linked to this. Supposing that coordinates are given in \mathbb{Z}^2 with the pixel $O(0, 0)$ in the center of the image (whereas on the top-left corner as often), the IDQFT will give an oscillation that follows the orthogonal axis of the line linking the two pixels involved in the initialization and crossing the origin O . Some experimentations are done in figure C.3.

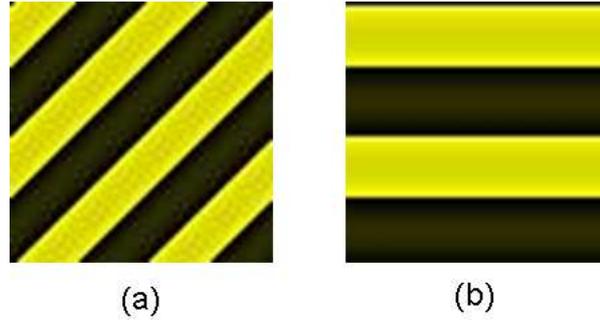


FIG. C.3 – Geometric oscillation examples. (a) : init with μ_{Yellow} , $Q_r[-f_1, -f_2] = K_r$ and $Q_r[f_1, f_2] = -K_r$; (b) : init with μ_{Yellow} , $Q_r[-f_1, 0] = K_r$ and $Q_r[f_1, 0] = -K_r$

This first section illustrates the fact that the Quaternionic spectrum includes evidently similar information than the 2-D complex spectrum : the frequency coordinates are associated with the geometric orientation and the level (low or high) of the features. Then, the second part of this article proposes to split this quaternionic spectrum into different domains in order to separate the different components of the colour image. For this, we propose to generalize the concept of filter bank to quaternions.

C.4 Quaternionic Filters Bank

The Fourier transform has some limitations. The more important is the fact that we loose the notion of chronology in the frequency domain. To acquire a performant strategy of signal analysis, we need a joint spatial/frequential representation. The discrete wavelet transform and the associated filter bank is able to fit to this representation family. The aim of the filter bank is the study of the behaviour of the different frequency bands. In order to realize this transform, the algorithm proposes to use some filtering operations. If we can define a set of filters that cut the frequency axis in several segments, we can also study, from all the filtered signals, the space behaviour of the different frequency bands.

We want to define a representation that allows to extract the different frequency components of a signal. This representation must be not redundant : if the signal is represented with N samples, the wavelet representation must contains N coefficients. Moreover, this representation must be invertible : a perfect reconstruction of the original signal from the coefficients. Finally we want to define a simple algorithm : all the filters must be defined from four lowpass and highpass filters.

A filter bank is a set of filters, linked by sampling operators. The downsampling operators are decimators, the upsampling operators are expanders. In a two-channel filter bank, the analysis/synthesis filters are normally lowpass and highpass. We illustrate the filter banks in figure C.4. More details about the classical concept of filter banks and wavelet is presented, for example, in [71, 46].

The goal of this section is to discover the conditions on the different filters for perfect reconstruction : $s = s'$ with $s \in \mathcal{L}^2([0..N-1] \times [0..N-1], \mathbb{H})$.

In the literature, three Quaternionic discrete wavelet transforms have been recently proposed :

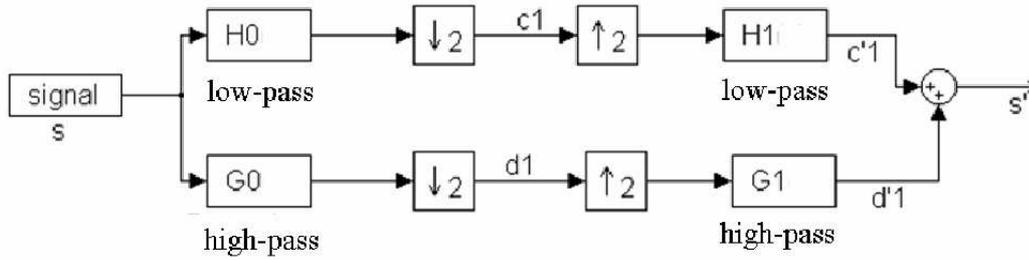


FIG. C.4 – Two-channel filter bank

- Bayro [4] has proposed a Quaternionic wavelet transform for greyscale image ($s \in \mathcal{L}^2([0..N - 1], \mathbb{R})$) with the principle of the modulated Gabor filters in quadrature. The used filters are defined as :

$$h[n_1, n_2] = g_\sigma[n_1, n_2] e^{2i\pi f_1 n_1} e^{2j\pi f_2 n_2}$$

with σ the standard deviation of the gaussian window and f_1, f_2 the frequency coordinates. We observe that the definition of this wavelet transform is an extension of the Bülow's work C.1. This expression shows that the Bayro wavelet decomposition recovers separate parity local structure in n_1 and n_2 . From the Gabor quaternionic coefficients, a concept of three phases is introduced (similar than the phases introduced by Bülow [8]). In the paper, the author proposed to use the phase concept in order to estimate the optical flow of the analyzed image. Notice that this wavelet decomposition is tuned for analysis and no discussion is done about reconstruction.

- Chan et al [12, 13] proposed a Quaternionic wavelet transform for greyscale image as a direct extension of the complex wavelet decomposition proposed by Kingsbury. In 1-D the complex wavelet transform uses complex wavelet basis functions that form a 1-D Hilbert transform pair (the spectrum of the complex wavelet function has no energy in the negative frequency region). The 1-D complex wavelet transform is redundant but the magnitudes of the coefficients are shift invariant. Chan et al proposed to extend this principle to 2-D. This is done by defining the four components of the quaternionic wavelet function from the 1-D Hilbert transform of the 2-D real tensor product wavelet function along and both the horizontal and vertical directions. According to the authors this quaternionic wavelet transform is approximately a localized Bülow quaternionic Fourier transform. As for the first presented work, the authors proposed to use the phase concept in order to estimate the optical flow of the analyzed image.
- Olhede et al [52] proposed the hyperanalytical wavelet transform for greyscale image. This work is similar than Chan transform : the four components of the quaternionic wavelet function are defined from the 1-D Hilbert transform of a 2-D real wavelet function along and both the horizontal and vertical directions. This new basis is called Hypercomplexing wavelet. A second family is also proposed by them from the work of Felsberg et al [30] and is called Monogenic wavelets.

All these works are linked with the work of Bülow and are approximately equivalent to a localized Bülow quaternionic Fourier transform. All these transforms allows us to study all the symmetry properties independently from the two directions and with a localized transform for greyscale image.

As for the Fourier transform, in this work we want to define a tool for processing Quaternion valued 2-D signal (colour image), in order to analyze vector valued signals. This problem is not actually studied in the literature. Moreover, the main part of our presented work is the definition of the filter banks and not the wavelet function, in order to obtain a numerical transform with perfect reconstruction. We propose now to study in the quaternion domain the three elements of a filter banks : convolution, downsampling and upsampling.

C.4.1 Filtering operation : convolution product

As for the complex case, one way to describe the filtering operation in the quaternions domain is to see it as a "black box" system, having an input e and an output s . The filtering can be translated by the convolution product between e , the original signal, and h , the impulse response of the filter system :

Definition 13 *The function defined by $\forall t \in \mathbb{R}$, and $e, h \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \mathbb{H})$ $s(t) = e \otimes h(t) = \int e(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$ is the Quaternionic convolution product between e and h .*

In the case of a numerical system, there is the same type of relation. When the input and output signals are sampled, the impulse response is a sampled signal $\{h[k]\}_{k \in \mathbb{N}}$. The link between the output and input is then a discrete convolution :

Definition 14 (DQCV) *Let $N \in \mathbb{N}$, $e, h \in \mathcal{L}^2([0..N-1], \mathbb{H})$: The function defined by $\forall n \in [0..N-1]$*

$$s[n] = e \otimes h[n] = \sum_{\tau=0}^{N-1} e[[n - \tau]_N] h[[\tau]_N]$$

is the Right Discrete Quaternionic convolution product between e and h .

The notation $[p]_N$ indicates that the indexes are calculated modulo N . Since the quaternionic product is not commutative, others convolution product can be defined.

The convolution theorem of the Fourier transform states that convolution of two signals in the spatial domain corresponds to their pointwise multiplication in the frequency domain, i.e.

$$g[n] = s \otimes h[n] \iff G[f] = S[f] \cdot H[f]$$

Since the quaternionic product is not commutative, this classical property is not generally true for quaternion.

Let $(e, \vec{\mu}, \vec{\nu}, \vec{\mu}\vec{\nu})$ be an orthonormal basis of \mathbb{H} , we can first decompose h as :

$$h[n] = h_a[n] + h_b[n] \cdot \vec{\nu}$$

where $h_a[n] = h_e[n] + h_\mu[n] \cdot \vec{\mu}$ and $h_b[n] = h_\nu[n] + h_{\mu\nu}[n] \cdot \vec{\mu}$ with h_e, h_μ, h_ν and $h_{\mu\nu}$ the projection of h on $(e, \vec{\mu}, \vec{\nu}, \vec{\mu}\vec{\nu})$.

Property 15 *Let $h, e \in \mathcal{L}^2(0..N-1, \mathbb{H})$ and s defined by $s = h \otimes e$ such that $s \in \mathcal{L}^2(0..N-1, \mathbb{H})$. then $\forall f \in [0..N-1]$,*

$$F_\mu^l(s)[f] = F_\mu^l(h_a)[f] F_\mu^l(e)[f] + F_\mu^l(h_b)[f] \vec{\nu} F_\mu^l(e)[-f]$$

In some special conditions, the precedent relation can be simplified. In the case where e has the even symmetry relation :

$$e[n] = e[-n] \iff E[f] = E[-f]$$

then we can prove that convolution of two signals in the spatial domain corresponds to their pointwise multiplication in the frequency domain.

In order to simplify the quaternion filter design, we can reverse the problem and ask what forms in the spatial domain correspond to the product operation in the frequency domain. The result is similar :

Property 16 *Let $h, e \in \mathcal{L}^2(0..N-1, \mathbb{H})$ and s defined by $S[f] = H[f] \cdot E[f]$ then $\forall n \in [0..N-1]$,*

$$s[n] = h_a \otimes e[n] + (h_b \cdot \vec{\nu}) \otimes e[-n]$$

All these problems are presented in details in other forms by Pei et al [55].

C.4.2 Definition of the downsampling

We want to modelise the influence in the quaternionic frequency domain of the downsampling in the spatial domain. A downsampling operation can be defined such that : we keep only half of the signal (for example the odd-numbered samples are lost). Downsampling is represented by $s \rightarrow \downarrow 2 \rightarrow s'$.

Proposition 17 Let $N \in \mathbb{N}$, $s \in \mathcal{L}^2([0..N-1], \mathbb{H})$ $\mu \in \mathbb{P} \cap \mathbb{S}$ and $S[f] = F_{\mu}^l(s)[f]$ then as for the classical complex case, it means that the downsampling of the signal can be defined in the quaternionic frequency domain :

$$s' = [\downarrow 2] s \implies S'[f] = \frac{1}{2} \left[S[f] + S\left[f + \frac{N}{2}\right] \right] \text{ for } f = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

with S' a $\frac{N}{2}$ periodic sequence.

In order to analyse the downsampling in the frequency domain we split the process $\downarrow 2$ into two operations :

Let u be the vector s with its odd-numbered components set to zero :

$$u[n] = \begin{cases} s[n] & \text{if } n \text{ even} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$u[n]$ can be defined such that :

$$u[n] = \frac{1}{2} (s[n] + (-1)^n s[n])$$

The second term includes $(-1)^n$ so that addition knocks out odd n . Since $\mu \in \mathbb{P} \cap \mathbb{S}$ we can write $(e^{-\mu\pi})^n = (-1)^n$ and thus

$$u[n] = \frac{1}{2} (s[n] + (e^{-\mu\pi})^n s[n])$$

In the frequency domain, we have :

$$\begin{aligned} U[f] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\mu\pi \frac{fn}{N}} . u[n] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} e^{-2\mu\pi \frac{fn}{N}} (s[n] + (e^{-\mu\pi})^n s[n]) \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\mu\pi \frac{fn}{N}} . s[n] + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\mu\pi \frac{fn}{N} - \mu\pi n} . s[n] \right] \text{ for } f = 0 \dots N-1 \end{aligned}$$

then

$$U[f] = \frac{1}{2} \left[S[f] + S\left[f + \frac{N}{2}\right] \right] \text{ for } f = 0 \dots N-1$$

The second step is such that :

$$s'[n] = u[2n]$$

because the result only involves even n .

In the frequency domain, we obtain

$$S'[f] = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{-2\mu\pi \frac{fn}{N/2}} . u[2n] \text{ for } f = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

with the following variable change $n' = 2n$

$$= \sum_{n'=0}^{N-1} e^{-2\mu\pi n' \frac{f}{2}} . u[n'] = U[f] \text{ for } f = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

It means that the downsampling of the signal can be defined in the quaternionic frequency domain :

$$s' = [\downarrow 2] s \implies S'[f] = \frac{1}{2} \left[S[f] + S\left[f + \frac{N}{2}\right] \right] \text{ for } f = 0 \dots \frac{N}{2} - 1$$

Since S is N -periodic, we observe that S' is $\frac{N}{2}$ -periodic.

C.4.3 Definition of the upsampling

During the reconstruction process the first step is to bring back full-length vectors. For this, we apply the upsampling operation. The odd-numbered components are returned as zeros by upsampling. Applied to a half-length signal, upsampling inserts zeros.

We want to analyse the upsampling in the quaternionic frequency domain. The signal reached by upsampling have zeros in their odd components :

$$s' = [\uparrow 2] s \implies \begin{cases} s'[2k] = s[k] \\ s'[2k+1] = 0 \end{cases} \quad \text{with } \{s[k]\}_{k=0 \dots \frac{N}{2}-1}$$

Proposition 18 Let $N \in \mathbb{N}$, $s \in \mathcal{L}^2([0.. \frac{N}{2} - 1], \mathbb{H})$ $\mu \in \mathbb{P} \cap \mathbb{S}$ and $S[f] = F_{\mu}^l(s)[f]$ then

$$s' = [\uparrow 2] s \implies S'[f] = S[f] \text{ for } f = 0 \dots N - 1$$

with S a $\frac{N}{2}$ -periodic sequence.

The quaternionic Fourier transform of s' is

$$S'[f] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\mu\pi \frac{fn}{N}} . s'[n] \text{ for } f = 0 \dots N - 1$$

If n is even then $s'[n] = s[n/2]$ otherwise $s'[n] = 0$. The quaternionic fourier transform can thus be written :

$$\begin{aligned} S'[f] &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ even}}}^{N-1} e^{-2\mu\pi \frac{fn}{N}} . s[n/2] \text{ we set } k = n/2 \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{-2\mu\pi \frac{(2f)k}{N}} . s[k] = \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{-2\mu\pi \frac{fk}{N/2}} . s[k] \\ &= S[f] \text{ for } f = 0 \dots N - 1 \end{aligned}$$

C.4.4 Quaternionic Filter banks with perfect reconstruction

As we said the goal of this section is to discover the conditions for perfect reconstruction : $s = s'$ with $s \in \mathcal{L}^2([0..N - 1], \mathbb{H})$.

In this paper, we consider that the filtering operation can be translated by a product :

Definition 19 Let $N \in \mathbb{N}$, $e \in \mathcal{L}^2([0..N - 1], \mathbb{H})$, $E = F_{-\mu}^l(e)$ the left Quaternionic Fourier transform of the original signal e of μ direction and $H \in \mathcal{L}^2([0..N - 1], \mathbb{H})$ $H = F_{-\mu}^l(h)$ the frequency answer of the filter and $\mu \in (\mathbb{P} \cap \mathbb{S})$.

The function defined by $\forall f \in [0..N - 1]$ $S[f] = H[f].E[f]$ is the filtering operation of e by h .

Because the input and output have a very simple relation, the spectrum product is more suitable for the application of quaternionic filter bank design (it is similar to the complex case).

The conditions are defined directly in the discrete quaternionic Fourier domain : we consider $H \in \mathcal{L}^2([0..N - 1], \mathbb{H})$ a N -periodic sequence corresponding to the frequency answer of the low-pass filter (with index 0 for the analysis and index 1 for the reconstruction), $G \in \mathcal{L}^2([0..N - 1], \mathbb{H})$ a N -periodic sequence corresponding to the frequency answer of the high-pass filter (with index 0 for the analysis and index 1 for the reconstruction) and $S = F_{-\mu}^l(s)$ a N -periodic sequence corresponding to the left discrete Quaternionic Fourier transform of the original signal s of μ direction with $s \in \mathcal{L}^2([0..N - 1], \mathbb{H})$ and $\mu \in (\mathbb{P} \cap \mathbb{S})$.

If we study the lowpass channel of the figure C.4 :

$$\begin{aligned} c_1 &= [\downarrow 2](\text{filtering}(h_0, s)) \\ C_1[f] &= \frac{1}{2} \left[H_0[f]S[f] + H_0\left[f + \frac{N}{2}\right]S\left[f + \frac{N}{2}\right] \right] \text{ for } f = 0 \dots \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

Now upsample and filtering :

$$C'_1[f] = \frac{1}{2} H_1[f] \left[H_0[f]S[f] + H_0\left[f + \frac{N}{2}\right]S\left[f + \frac{N}{2}\right] \right] \text{ for } f = 0 \dots N - 1$$

The highpass output is the same formula with filters H changed to filters G :

$$D'_1[f] = \frac{1}{2} G_1[f] \left[G_0[f]S[f] + G_0\left[f + \frac{N}{2}\right]S\left[f + \frac{N}{2}\right] \right] \text{ for } f = 0 \dots N - 1$$

The filter bank combines the two channel to get s'

$$S'[f] = \frac{1}{2} \left[G_1[f]G_0[f] + H_1[f]H_0[f] \right] S[f] + \frac{1}{2} \left[G_1\left[f + \frac{1}{2}\right]G_0\left[f + \frac{1}{2}\right] + H_1\left[f + \frac{1}{2}\right]H_0\left[f + \frac{1}{2}\right] \right] S\left[f + \frac{1}{2}\right]$$

We deduce that a 2-channel filter bank gives perfect reconstruction when :

– No distortion :

$$G_1[f]G_0[f] + H_1[f]H_0[f] = 2 \text{ for } f = 0 \dots N - 1 \quad (\text{C.2})$$

– Alias cancellation

$$G_1\left[f + \frac{N}{2}\right]G_0\left[f + \frac{N}{2}\right] + H_1\left[f + \frac{N}{2}\right]H_0\left[f + \frac{N}{2}\right] = 0 \text{ for } f = 0 \dots N - 1 \quad (\text{C.3})$$

We observe that we obtain same conditions as classical filter banks but the order of the elements is important. Since the quaternionic product is not commutative, by using other definitions for the filtering operation we can obtain other conditions.

In order to illustrate the Quaternionic wavelet transform for colour image, we propose now a simple construction : the colour Shannon filter bank.

C.4.5 An example : the Quaternionic Shannon filter bank

The Shannon wavelet is constructed from the Shannon multiresolution approximation which approximates functions by their restriction to low frequency intervals. This multiresolution is associated with this following low-pass filter :

$$H(\xi) = \sqrt{2} \cdot 1_{\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]} \text{ for } \xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ with } H(\xi) = \sum_n h[n] e^{-2j\pi\xi n}$$

We propose to adapt the Shannon filter bank to the discrete quaternionic domain. We can add one condition on the filters :

– The wavelet coefficients must be pur quaternion (to be a "colour" coefficient).

The signals c_1 and d_1 of the figure C.4 must be such that $c_1, d_1 \in \mathcal{L}^2([0..N - 1], \mathbb{P})$. The quaternionic Fourier transform of c_1 and d_1 must have antihermitian properties of symmetry.

Moreover we propose to follow the concept of two-channel multirate filter bank with conjugate mirror filters : the reconstruction filters are the reverse version of the analysis filters : $h_1[n] = h_0[-n]$ and $g_1[n] = g_0[-n]$. We know that if h_1, g_1 are real, then $H_1[f] = \bar{H}_0[f]$ and $G_1[f] = \bar{G}_0[f]$.

In this case, we propose that the two low-pass filters are defined such that :

$$H_0[f] = H_1[f] = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{for } f \in [0, \frac{N}{4}-1] \cup [\frac{3N}{4}+1, N-1] \\ 0 & \text{for } f \in [\frac{N}{4}+1, \frac{3N}{4}-1] \end{cases}$$

In this case G_0 et G_1 must satisfy :

$$\begin{cases} G_0[f]G_1[f] = 0 \\ G_0[f + \frac{N}{2}]G_1[f] = 0 \end{cases} \text{ for } f \in [0, \frac{N}{4}-1] \cup [\frac{3N}{4}+1, N-1]$$

$$\begin{cases} G_0[f]G_1[f] = 2 \\ G_0[f + \frac{N}{2}]G_1[f] = 0 \end{cases} \text{ for } f \in [\frac{N}{4}+1, \frac{3N}{4}-1]$$

We propose this simple solution :

$$G_0[f] = G_1[f] = \begin{cases} 0 & \text{for } f \in [0, \frac{N}{4}-1] \cup [\frac{3N}{4}+1, N-1] \\ \sqrt{2} & \text{for } f \in [\frac{N}{4}+1, \frac{3N}{4}-1] \end{cases}$$

It remains the spectral crossover points at $f = \frac{N}{4}$ and $f = \frac{3N}{4}$ because at these points $H_0[f + \frac{N}{2}]H_1[f] \neq 0$ if $H_0[\frac{N}{4}] = H_0[\frac{3N}{4}] = \sqrt{2}$.

We propose the following relations for the spectral crossover points :

$$\begin{aligned} H_0[N/4] &= H_0[3N/4] = 1 ; H_1 = \bar{H}_0 \\ G_0[N/4] &= -1.G_0[3N/4] = \mu ; G_1 = \bar{G}_0 \end{aligned}$$

with $\mu \in \mathbb{P} \cap \mathbb{S}$. With these definitions H_0 , G_0 , H_1 , and G_1 satisfy the condition for perfect reconstruction. Moreover H_0 and G_0 have hermitian properties of symmetry.

We defined the four filters required for the wavelet decomposition/reconstruction. But colour images are two-dimensional and for this, we must have two-dimensional filters. Their construction can be easy if we use a separable strategy : products of one-dimensional filters. For this, we apply the 1D wavelet transform on each line of the image and we apply the 1D wavelet transform on each column of the precedent matrix.

To conclude this section about quaternionic filters, we can make some remarks about the definition of the high-pass filter. We have proposed an empirical procedure to define G_0 but in the classical approach about perfect reconstruction filter bank, a more systematic relation is defined[71, 46] :

$$G_0(\xi) = e^{-2j\pi\xi} \cdot \bar{H}_0(\xi + \frac{1}{2})$$

One can wonder whether this relation is valid for quaternionic filter banks and whether it permits to satisfy the conditions C.2 and C.3 (with $H_1[f] = \bar{H}_0[f]$ and $G_1[f] = \bar{G}_0[f]$) :

$$G[f]\bar{G}[f] + H[f]\bar{H}[f] = 2 \text{ for } f = 0 \dots N-1 \quad (\text{C.4})$$

$$\bar{G}[f]G[f + \frac{N}{2}] + \bar{H}[f]H[f + \frac{N}{2}] = 0 \text{ for } f = 0 \dots N-1 \quad (\text{C.5})$$

We propose two generalizations :

$$G[f] = e^{-2\mu\pi \frac{f}{N}} \bar{H}[f + \frac{N}{2}] \quad (\text{C.6})$$

$$G[f] = \bar{H}[f + \frac{N}{2}] e^{-2\mu\pi \frac{f}{N}} \quad (\text{C.7})$$

These two relations are not equivalent since the product is not commutative.

– For the generalization C.6 :

$$G[f]\bar{G}[f] = e^{-2\mu\pi\frac{f}{N}}\bar{H}[f+\frac{N}{2}].H[f+\frac{N}{2}].e^{2\mu\pi\frac{f}{N}} = e^{-2\mu\pi\frac{f}{N}}|H[f+\frac{N}{2}]|^2.e^{2\mu\pi\frac{f}{N}} = \left|H[f+\frac{N}{2}]\right|^2$$

The first condition (C.4) is satisfied if H is such that (a classical condition for orthonormal decomposition) :

$$\left|H[f+\frac{N}{2}]\right|^2 + |H[f]|^2 = 2 \quad (C.8)$$

$$\bar{G}[f]G[f+\frac{N}{2}] = H[f+\frac{N}{2}]e^{2\mu\pi\frac{f}{N}}.e^{-2\mu\pi\frac{f+0.5N}{N}}\bar{H}[f] = -H[f+\frac{N}{2}]\bar{H}[f]$$

The second condition (C.5) is satisfied if H is such that $H[f+\frac{N}{2}]\bar{H}[f] = \bar{H}[f]H[f+\frac{N}{2}]$. It is the case if H is real.

– For the generalization (C.7) :

$$G[f]\bar{G}[f] = \bar{H}[f+\frac{N}{2}]e^{-2\mu\pi\frac{f}{N}}.e^{2\mu\pi\frac{f}{N}}H[f+\frac{N}{2}] = \left|H[f+\frac{N}{2}]\right|^2$$

We obtain the same result as for the relation (C.6).

$$\bar{G}[f]G[f+\frac{N}{2}] = e^{2\mu\pi\frac{f}{N}}.H[f+\frac{N}{2}].\bar{H}[f]e^{-2\mu\pi\frac{f+0.5N}{N}}$$

We can not simplify this expression since the product is not commutative. However, the second condition (C.5) is always satisfied if H is real.

We conclude that if H is real and if it satisfies equation (C.8), we can use the relation (C.6) or (C.7) to define the high-pass filter. It is the case for our Shannon low-pass filter, and thus G can be defined by $G[f] = e^{-2\mu\pi\frac{f}{N}}\bar{H}[f+\frac{N}{2}]$ for $f = 0\dots N-1$. It is the direct extension of the classical Shannon multiresolution to quaternion domain.

C.4.6 Experimentation

First, in order to illustrate the precedent construction, we propose to show three analysis functions associated with our filter bank (figure C.5). Like the analysis of the frequency domain, we initialised the "wavelet" domain with a Dirac and studied the response in the spatial domain after an inverse transform. We observe that the atoms correspond to coloured "classical" wavelet ($\mu = \mu_{grey}$).

To illustrate this decomposition, we create a test image from three coloured objects (figure C.6.a) and we use a natural image (figure C.7.a). We observe that the representation contains all the expected elements : the low-pass part correspond to the coarse approximation of the colour image ; the high-pass part tend to be sparse : a coefficient is large only if edges are present within the support of the wavelet. Moreover the colour of the coefficients gives information about the colour of the discontinuities.

C.5 Conclusion

In this paper, we presented the conditions needed to reconstruct properly a colour signal after a μ directional IDQFT without any loss of information, that is to say the spatial scalar part is zero. We discussed as well on the influence of an initialization of the quaternionic spectrum by a Dirac and gave an interpretation of Fourier coefficient influence on the spatial domain with both calculus and graphical illustrations. Then in a second part, we used the previous concepts to propose a new quaternionic filter bank definition. In that way, both discrete spectrum condition for a perfect reconstruction have been discussed. To apply this new concept, we proposed a simple version of the colour filter bank. The new transform is illustrated on two colour images.

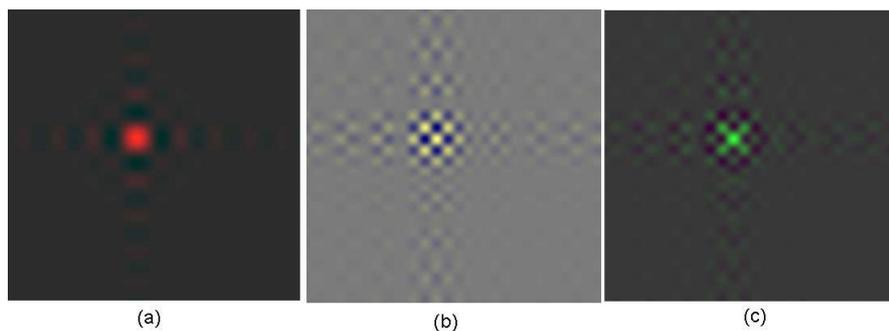


FIG. C.5 – Analysis functions associated with the proposed filter bank

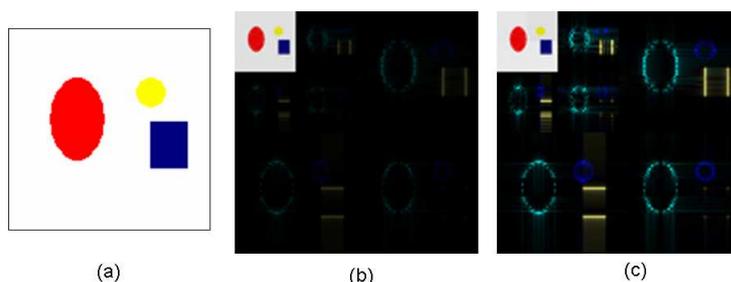


FIG. C.6 – The wavelet decomposition of a simple test image : (a) Original image (b) The wavelet coefficients (c) the decomposition normalized for each plan

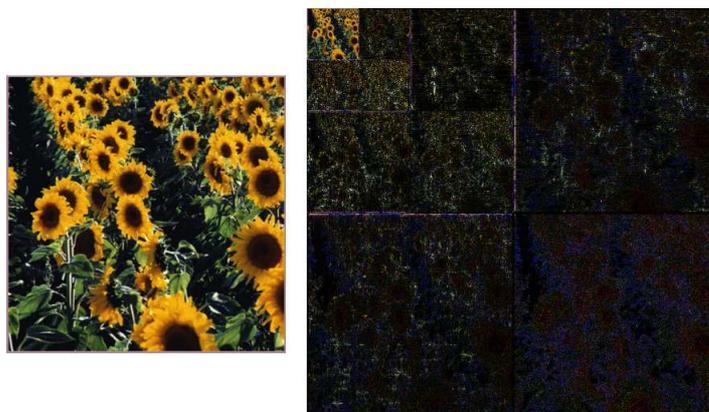


FIG. C.7 – The wavelet decomposition of a natural image : (a) Original image (b) The decomposition normalized for each plan

This paper must be considered as the beginning of a more complete discussion because some important questions remain open : the definition of more regular quaternionic filters, the using of this new wavelet coefficients for the analysis of colour image, the extension of the concept of multiresolution to quaternions ...

SPATIAL AND SPECTRAL QUATERNIONIC APPROACHES FOR COLOUR IMAGES

Nous joignons ici l'article paru dans le journal « Computer Vision and Image Understanding », special issue on Color Image Processing, en juillet 2007 et traitant des aspects spatiaux et fréquentiels développés avec le formalisme des quaternions.

Spatial and spectral Quaternionic approaches for Colour Images

Patrice Denis, Philippe Carré and Christine Fernandez-Maloigne

University of Poitiers - SIC Laboratory - Bat SP2MI - Bd Marie et Pierre Curie B.P. 30179 - 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex - FRANCE

Hypercomplex or quaternions numbers have been used recently for both greyscale and colour image processing. Fast, numerous hypercomplex 2D Fourier transforms were presented as a generalization of the complex 2D Fourier transform to this new hypercomplex space. Thus, the major problem was to put an interpretation of what information the Fourier coefficients could provide. In this paper, we first define the conditions on the spectrum coefficients needed to reconstruct a colour image without loss of information through the inverse quaternionic Fourier transform process. The result is used to interpret the quaternionic spectrum coefficients of this specific colour Fourier transform. Secondly, with this apprehension of the quaternion numbers and the corresponding colour spectrum space, we define spatial and frequential strategies to filter colour images.

quaternions ; quaternionic Fourier transform ; colour image processing ; filter ; symmetry conditions

Nowadays, as multimedia devices and internet are becoming accessible to more and more people, image processing must take colour information into account because colour processing is needed everywhere for new technologies. Several approaches have been submitted to deal with colour images, one of the oldest is to process each channel of the colour image separately. Implementing such programs often creates colour shifts and artefacts, so different approaches should be used to produce visually pleasing colour images. A quite recent approach is to encode the three channel components on the three imaginary parts of a quaternion as proposed by S.T. Sangwine and T. Ell in [63, 50, 49]. Quaternions have been used for both greyscale images by Bülow [8] and colour ones by Sangwine et al. [63]. An

introduction of quaternionic Fourier transforms has been made independently by both the teams above but in different definitions. In this paper, we study the Quaternionic Fourier spectrum in order to define precisely the properties of this new colour representation. In this way, we want to explain the colour information contained in the new domain that is to say how the different real and imaginary parts of the spectral quaternionic domain interact with the pure quaternion component chosen to encode colours in spatial domain. The other fundamental studied topic in the paper is the filtering aspect. Indeed, we review spatial colour filter approaches, introduce a new spatial gradient approach using quaternions, and validate a new quaternionic spectral colour filter.

The first section of this paper reminds what the quaternions are and how to use them to process colour information. Then we study how quaternions can be used to make \mathbb{R}^3 transformations such as projections, rotations, etc. As an example, these transformations are used to switch from RGB to HSV colour spaces. The second section introduces the discrete quaternionic Fourier transform proposed by Sangwine and by Bülow, and we define the conditions on the quaternionic spectrum to enable manipulations into this frequency domain without losing information when going back to the spatial domain. This is also the subject of the second section which gives a new interpretation of the influence of Dirac initialization on the quaternionic Fourier space. The third section starts by surveying existing colour image filtering approaches based on quaternions. Then, we use the \mathbb{R}^3 transformations defined in the first section and the analysis of the quaternionic frequency domain in the second section to propose the definitions of a new quaternionic vector gradient and a frequency quaternionic filter. Finally, the appendix gives more details with formulas and graphics to help understand the information included in the quaternionic colour spectrum.

D.1 Quaternions

D.1.1 Concept

A quaternion $q \in \mathbb{H}$ (H refers to Hamilton[36] who was first to discover these numbers) is a generalization of a complex number and is defined as $q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k$ where :

- q_r, q_i, q_j and q_k are real numbers.
- i, j and k are three new imaginary numbers, asserting :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \quad ij = -ji = k \quad jk = -kj = i \quad \text{and} \quad ki = -ik = j$$

With $q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k$ any quaternion :

- $\bar{q} = q_r - q_i i - q_j j - q_k k$ is q 's conjugate.
- q 's modulus or norm is $\sqrt{q_r^2 + q_i^2 + q_j^2 + q_k^2} = \sqrt{q\bar{q}}$ noted $|q|$.
- if $q \neq 0$, then $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$ is q 's inverse.
- $\Re(q) = q_r$ is q 's real part. If $\Re(q) = q$, then q is real.
- $\Im(q) = ib + jc + kd$ is q 's imaginary part. If $\Im(q) = q$, then q is pure.
- $\mathbb{P} = \{q \in \mathbb{H} \mid q = \Im(q)\}$ is the Pure Quaternion set.
- $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$ is the Unitary Quaternion set.

Note that the quaternion product is anti-commutative.

Quaternions can be expressed using scalar part $S(q)$ and vector part $V(q)$, $q = S(q) + V(q)$ with $S(q) = q_r$ and $V(q) = q_i i + q_j j + q_k k$. Sangwine and Ell [63, 50, 49, 65, 66, 27] were the first to use this vector part of quaternions to encode colour images. They took the three imaginary parts to code the r (red), g (green) and b (blue) colour components of an image. A colour image I with the spatial resolution of $N \times M$ pixels is in this way represented by an $N \times M$ matrix as follow :

$$q(s, t) = r(s, t)i + g(s, t)j + b(s, t)k$$

where $s = 1, 2, \dots, N$ and $t = 1, 2, \dots, M$ are the spatial coordinates of the pixel q .

D.1.2 \mathbb{R}^3 Transformations with Quaternions

As pure quaternions are used analogously to describe \mathbb{R}^3 vectors, the classical \mathbb{R}^3 transformations such as translations, reflections, projections, rejections and rotations can be defined with only additions and multiplications as explained by Sangwine in [66] (cf. figure D.1). With two pure quaternions $(q_1, q_2) \in \mathbb{P}^2$, the translation vector is supported by the quaternion $q_{trans} = q_1 + q_2$. If $q \in \mathbb{P}$ and $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ then $q_{refl} = -\mu q \mu$ is the q 's reflection vector with μ axis. If $q \in \mathbb{P}$ and $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ then $q_{proj} = \frac{1}{2}(q + \mu q \mu)$ is the q 's projection vector on μ axis. If $q \in \mathbb{P}$ and $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ then $q_{rej} = \frac{1}{2}(q - \mu q \mu)$ is the q 's orthogonal projection vector on μ axis's orthogonal plane or the q 's rejection of the μ axis. And eventually if $q \in \mathbb{P}$, $\phi \in \mathbb{R}$ and $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ then $q_{rot} = e^{\mu \frac{\phi}{2}} q e^{-\mu \frac{\phi}{2}}$ is the q 's rotation vector around μ axis with ϕ angle.

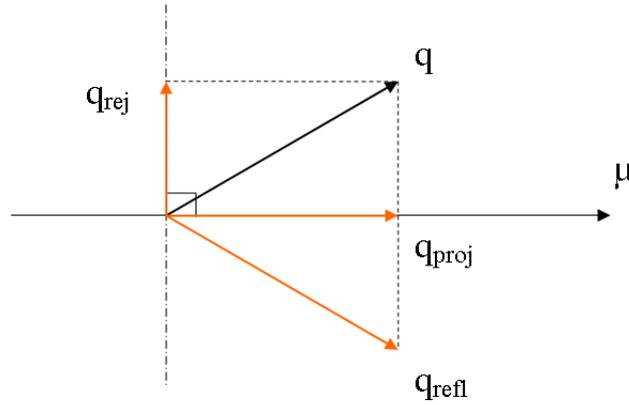


FIG. D.1 – **Geometric Transformations in \mathbb{R}^3 with Quaternion** : q denotes the original vector, μ denotes the axis vector, q_{refl} is the q 's reflection vector with μ axis, q_{rej} is the q 's rejection of the μ axis and q_{proj} is q 's projection vector on μ axis.

For each colour pixel described in RGB colour space using a quaternion vector $q \in \mathbb{P}$, HSV (hue, saturation, value) colour space coordinates can be found using operations on quaternions. We consider that the value component of the HSV vector represents the norm of the colour's orthogonal projection vector $(q \cdot \mu_{grey}) \mu_{grey}$ on the grey axis μ_{grey} (this axis can be defined such that $\mu_{grey} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$). Saturation and hue are represented on the plane orthogonal to the grey axis which crosses $(q \cdot \mu_{grey}) \mu_{grey}$. The saturation is the distance between the colour vector q and the grey axis μ_{grey} , and hue is the angle between the colour vector q and a colour vector ν taken anywhere on the plane orthogonal to μ_{grey} and which sets the zero hue reference angle. This reference hue value is often taken to represent the red colour vector, so we decided arbitrarily to associate the red colour vector to the ν vector and gave it a zero hue value (cf. figure D.2). Hue is the angle between this reference colour vector and the colour vector q .

For a colour vector q , the corresponding H, V, and S components can be obtained using the grey-axis $\mu = \mu_{grey} \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ and the reference colour vector $\nu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ with the following elementary quaternionic operations [35]

$$\begin{cases} H = \tan^{-1} \frac{|q - \mu \nu q \mu|}{|q - \nu q \mu|} \\ S = |\frac{1}{2}(q + \mu q \mu)| \\ V = |\frac{1}{2}(q - \mu q \mu)| \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

which will be used later in this paper to define a new gradient operator.

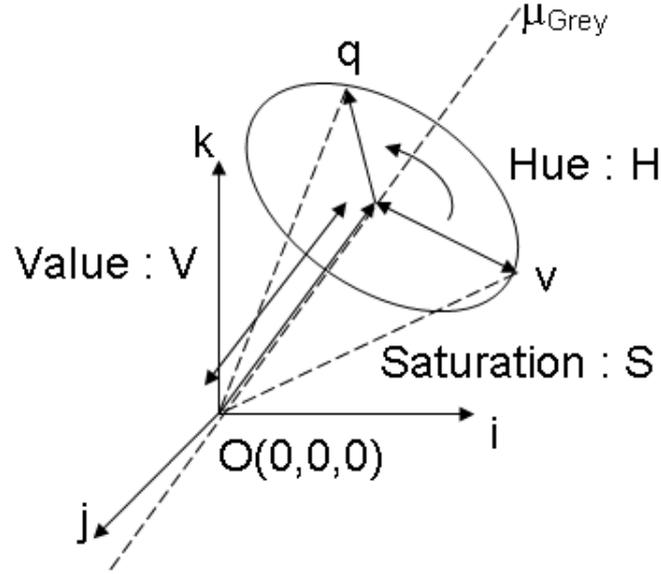


FIG. D.2 – Hue, Saturation and Value given with reference μ_{Grey} and $H(\nu) = 0$

D.2 Discrete Quaternion Fourier Transform

D.2.1 Definition

Different works introduced the quaternionic Fourier Transform, [8, 65]. The Discrete Quaternion Fourier Transform (DQFT) in $\mu = \mu_i i + \mu_j j + \mu_k k \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ direction analysis allows us to give the frequency equivalence of a $N \times M$ spatial colour image in a matrix defined by

$$Q(S, T) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{s=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{t=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \exp^{-2\mu\pi(\frac{Ss}{N} + \frac{Tt}{M})} q(s, t) \quad (D.2)$$

Here, the term $Q(S, T)$ represents the frequency coordinates and $q(s, t) = r(s, t)i + g(s, t)j + b(s, t)k$ is a pure quaternion used to represent the three different colour channels of the pixel at the coordinates (s, t) of the colour image. Since the quaternion product is not commutative, DQFT can have different forms [55]. Note that in this paper we will follow the DQFT definition given in (D.2).

The inverse DQFT (IDQFT) to the transform presented in (D.2) is given by

$$q(s, t) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{S=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{T=-\frac{M}{2}+1}^{\frac{M}{2}} \exp^{2\pi\mu(\frac{Ss}{N} + \frac{Tt}{M})} Q(S, T)$$

It is proved [55, 31] that DQFT or its inverse (IDQFT) for a square matrix of dimension $2^n \times 2^n$ could be simplified by processing two fast complex Fourier transforms.

D.2.2 Colour quaternion spectrum properties

In order to understand what the Fourier coefficients stand for, we studied the digital characterization of the DQFT. We first discovered that the colour Fourier spectrum exhibits some symmetries due to zero scalar spatial part of any colour image. This observation follows the well-known fact that the spectrum of a real signal by a complex Fourier transform (CFT) has hermitian properties of symmetry.

Even if the spatial information of a colour image is using pure quaternions only, applying a DQFT on an image results in full quaternions (i.e. with nonzero scalar part). We wanted to find, after IDQFT,

a space where scalar part is zero in order to avoid any loss of information as the spatial colour image is coded on a pure quaternions matrix.

Let

$$Q(S, T) = Q_r(S, T) + Q_i(S, T)i + Q_j(S, T)j + Q_k(S, T)k$$

be the spectral quaternion at coordinates $(S, T) \in ([-\frac{N}{2} + 1.. \frac{N}{2}], [-\frac{M}{2} + 1.. \frac{M}{2}])$.

In addition, let

$$q(s, t) = q_i(s, t)i + q_j(s, t)j + q_k(s, t)k$$

denote the IDQFT quaternion of (s, t) spatial coordinates.

Developping this, with $\mu = \mu_i i + \mu_j j + \mu_k k$, the cartesian real part form of the spatial domain leads to

$$\begin{aligned} q_r(s, t) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum \sum [\cos(2\pi (\frac{Ss}{N} + \frac{Tt}{M}))Q_r(S, T) \\ &- \mu_i \sin(2\pi (\frac{Ss}{N} + \frac{Tt}{M}))Q_i(S, T) - \mu_j \sin(2\pi (\frac{Ss}{N} + \frac{Tt}{M}))Q_j(S, T) \\ &- \mu_k \sin(2\pi (\frac{Ss}{N} + \frac{Tt}{M}))Q_k(S, T)] \end{aligned} \quad (D.3)$$

where $q_r(s, t)$ is null when

$$\begin{aligned} Q_r(-S, -T) &= -Q_r(S, T); \quad Q_i(-S, -T) = Q_i(S, T) \\ Q_j(-S, -T) &= Q_j(S, T); \quad Q_k(-S, -T) = Q_k(S, T) \end{aligned}$$

As it can be seen from the symmetries contained in the Fourier spectrum, the real part must be odd and all the imaginary parts must be even. This is a direct extension of the antihermitian property of the complex Fourier transform of imaginary signal. Any transform in the quaternionic colour spectrum must obey to these rules to keep spatial information safe.

D.2.3 Digital study of the colour spectrum

In this section, we try to give an interpretation of the information contained in the quaternionic spectrum of colour images. To do this, we propose to initialize the discrete spectrum with a constant which will represent a Dirac (an infinitely short pulse) and study the response in the spatial domain after IDQFT. Note that the details of the calculus are presented in appendix.

Initialization could be done in two different ways :

- On the real part of the spectrum, this leads to odd oscillations on the spatial domain linked to the μ direction parameter of the Fourier transform. Complex colours are obtained in the RGB colour space after modifying μ and normalizing it in order to obtain a pure unit quaternion.

If $Q_r(S_0, T_0) = K_r; Q_r(-S_0, -T_0) = -K_r$ then

$$q(s, t) = 2K_r(\mu_i \sin(2\pi (\frac{S_0s}{N} + \frac{T_0t}{M})) + \mu_j \sin(2\pi (\frac{S_0s}{N} + \frac{T_0t}{M})) + \mu_k \sin(2\pi (\frac{S_0s}{N} + \frac{T_0t}{M})))$$

- On an imaginary part of the spectrum, this results to even oscillations on the spatial domain independently from the μ parameter of the Fourier transform. A proper initialization on the different imaginary components with respect to the additive colour synthesis theory allows to reach complex colours. For example to get yellow oscillations the red and green components (i and j) should be initialised (with $e=i, j$ or k).

If $Q_e(S_0, T_0) = Q_e(-S_0, -T_0) = K_e$ then $q_e(s, t) = 2K_e \mu_e \cos(2\pi (\frac{S_0s}{N} + \frac{T_0t}{M}))$

D.2.4 Quaternionic Graphical Spectrum Illustration

figure D.3 illustrates the different possible initializations on the quaternionic spectrum. A pair of constants has been set on the quaternionic spectrum following the properties for spatial reconstruction, then IDQFT has been performed to make the following subfigures (for more graphical illustrations report to section D.5.2 in the appendix).

- Initializing a pair of constants on any imaginary component with any direction μ leads to a spatial oscillation on the same component (Figure D.3(a)).
- Initializing a pair of constants on the real component leads to a spatial oscillation following the same imaginary component(s) as those included in the direction μ (Figure D.3(b)).
- The coordinates (S_0, T_0) and $(-S_0, -T_0)$ of the two initialization points in the Fourier domain affect the orientation and the frequency of the oscillations in the spatial domain as it does so for greyscale image in complex Fourier domain. Orientation of the oscillations can be changed as shown in Figure D.3(c).

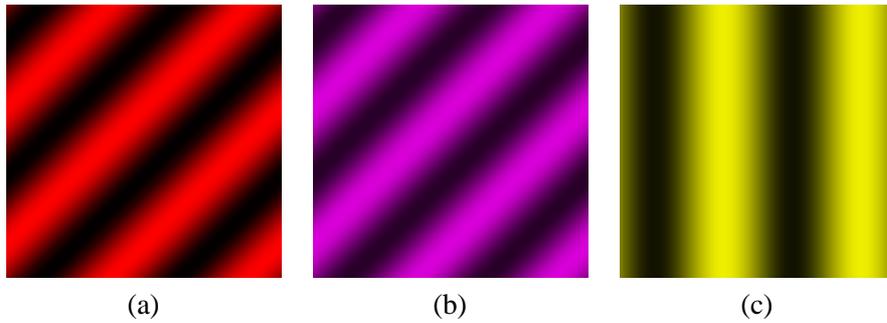


FIG. D.3 – **Spectrum Initialization examples** : (a) $\mu_{Grey} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ and $Q_i(2, 2) = Q_i(-2, -2) = K_i$; (b) $\mu_{Magenta} = \frac{i+k}{\sqrt{2}}$ and $Q_r(2, 2) = -Q_r(-2, -2) = K_r$; (c) $\mu_{Yellow} = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$ and $Q_r(0, 2) = -Q_r(0, -2) = K_r$

The following focuses on the use of quaternions in filtering which is one of the most frequently used low level image processing operations. We first review spatial colour image approaches and get a new spatial colour filter. Then starting from the interpretation of the quaternionic Fourier space that we made in this previous section, we introduce a quaternionic spectrum filter.

D.3 Quaternionic filtering

In this section, we focus on the colour filtering aspect and study discontinuity detection which is a fundamental issue of colour image processing such as edge detection and image analysis. A number of approaches can be used to detect the edges and fine details in colour images. The following briefly surveys well-known approaches.

D.3.1 Spatial filtering

D.3.1.1 Marginal methods

Marginal methods, adopted directly from greyscale image processing, process each channel of the colour image separately (figure D.4a). Thus, they are computationally simple and easy to implement. On the other hand, due to the omission of the essential spectral information during processing, many marginal methods have insufficient performance [45, 43]. As presented in [44, 45], edges can be detected in a component-wise manner or by applying the processing solution to the luminance signal. However, neither approach can detect the discontinuities in colour information.

D.3.1.2 Vectorial methods

To avoid the drawbacks of marginal solutions, vectorial methods, such as those based on robust order statistics [43, 56], process colour pixels as vectors (figure D.4b). In the design proposed by Di Zenzo [21], edges are detected using colour vectorial gradients. The vectorial methods usually have better performance compared to marginal solutions, however, the performance improvements are obtained at expense of the increased computational complexity.

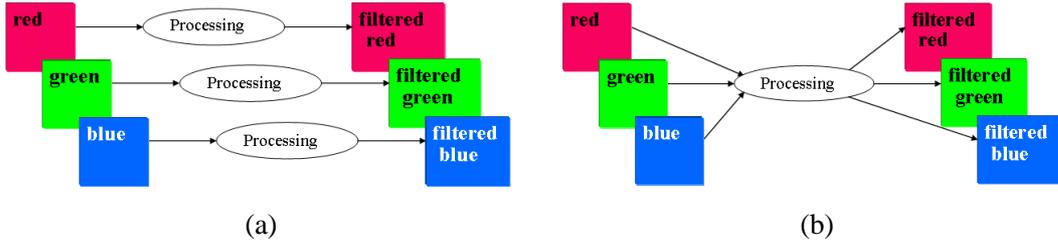


FIG. D.4 – (a)Marginal and (b) Vectorial methods

D.3.1.3 Perceptual methods

Perceptual methods [32, 39, 72, 57] are based on the human visual system (HVS) characteristics. For example, in [11], Carron used a marginal gradient method but based on a weight factor : the hue coefficient of each pixel, more relevant than saturation or intensity to split colours. In a second approach, when the hue information is not enough to detect edges, the gradient is given using intensity and/or saturation. The contribution in this approach relies on the fact that if the difference between two colours is detected with a high saturation, the colours seem farther than if they have smaller saturation (i.e. nearer from the grey axis) but the same hues. figure D.5 shows that the two green vectors q_1 and q_2 , near the grey axis, seem to have a smaller hue difference than the two red vectors q_3 and q_4 , far from the grey axis. This is not true but there is a difference : q_1 and q_2 have a smaller saturation (distance from the grey axis) than q_3 and q_4 . The perceptual methods because using the HVS characteristics give better results than the marginal and vectorial ones. Moreover the chromatic information of pixels is used to avoid artefacts and a major advantage is the integration of colour shadows. Nevertheless, by working in proper colour spaces and using thresholds for instance for hue relevance, algorithms complexity is raised.

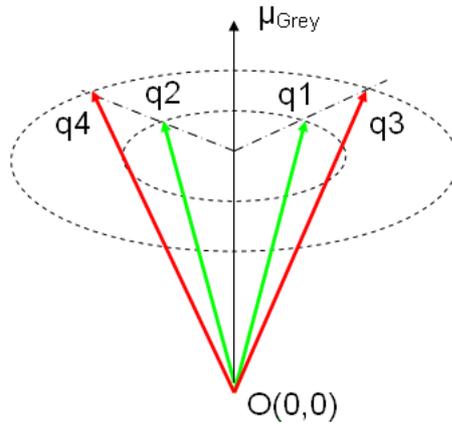


FIG. D.5 – The distance between q_1 and q_2 (green vectors) seems to be smaller than between q_3 and q_4 (red vectors) but the hue difference is the same : $\widehat{q_1 q_2} = \widehat{q_3 q_4}$

D.3.1.4 Sangwine’s quaternionic approach

Sangwine proposed the convolution on a quaternionic colour image can be defined by [63, 50, 65] :

$$q_{filtered}(s, t) = \sum_{\tau_1=-n_1}^{n_1} \sum_{\tau_2=-m_1}^{m_1} h_l(\tau_1, \tau_2)q((s - \tau_1)(t - \tau_2))h_r(\tau_1, \tau_2) \tag{D.4}$$

where h_l and h_r are the two conjugate filters of dimension $N_1 \times M_1$ where $N_1 = 2n_1 + 1 \in \mathbb{N}$ and $M_1 = 2m_1 + 1 \in \mathbb{N}$.

From this definition of the convolution product, Sangwine proposed a colour edge detector in [62]. In this method, the two filters h_1 and h_2 are conjugated in order to fullfill a rotation operation of every pixel around the greyscale axis by an angle of π and compare it to its neighbours (cf. figure D.6).

$$q_{filt}(s, t) = l \star q \star r(s, t) \quad (D.5)$$

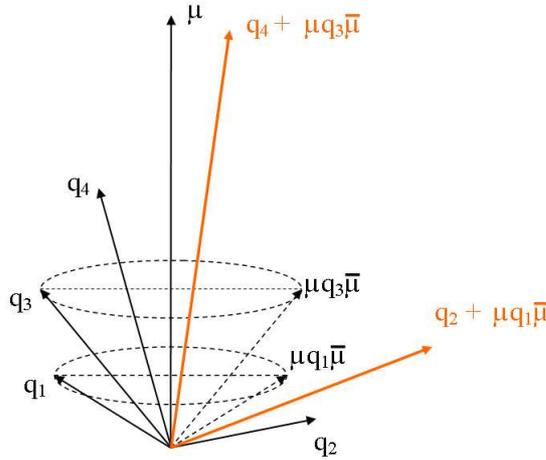


FIG. D.6 – **Sangwine’s Edge Detector Scheme** : μ is the grey axis ; $\mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $\mu q_3 \bar{\mu}$) is the rotated vector of q_1 (resp. q_3) around μ with an angle of π ; the comparison vector between q_1 and q_2 (resp. between q_3 and q_4) is given by $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$) ; $q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$ is near from the grey axis so the colour seems grey but $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ is far from the grey axis so Sangwine’s filter has detect an edge as this vector is more coloured.

The filter composed by a pair of quaternion conjugated filters is defined as follows

$$l = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ Q & Q & Q \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad r = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{Q} & \bar{Q} & \bar{Q} \end{bmatrix} \quad (D.6)$$

where $Q = e^{\mu \frac{\pi}{2}}$ and $\mu = \mu_{Grey} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$ the greyscale axis.

The filtered image (cf. figure D.6) is a greyscale image almost everywhere, because in homogeneous regions the vector sum of one pixel to its neighbours rotated by π around the grey axis has a low saturation (cf. $q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$ for instance). However, pixels in colour opposition (like q_1 and q_2 for example) represent a colour edge. Therefore, they present a vector sum far from the grey axis. Edges are thus coloured due to this high distance.

Although this detector has a good performance, it often produces false colours, for example, when the vector sum is out of the colour space domain. figure D.7 shows that the edge of the hat is not detected by the same colour in c or d where the horizontal filtering convolution is applied rightwise or leftwise.

D.3.1.5 A new gradient detector

Starting with the result of Sangwine filter, we get for each pixel q_1 and q_3 a vector of itself rotated by π around the greyscale axis and compared to its neighbours q_2 and q_4 . We saw that the more the colour vector of a pixel is far from its neighbours (colour edge), the more the vector sum in Sangwine’s filter is far from the grey axis. Our approach also gives us a colour gradient. We propose to determine the distance q_{dist} of Sangwine’s comparison colour vector sum $q_{sum} = q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ or $q_{sum} = q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$ from the grey axis μ (cf. figure D.8). This distance can be calculated with quaternionic operations (refer to section D.1.2) and is the norm of the rejection of the vector of the grey axis. This distance is defined from a colour vector to the grey axis and we work in the RGB colour space. Thus, equation (D.1) implies that this is the saturation of the colour vector sum given by Sangwine’s filter.



FIG. D.7 – **Sangwine edge detector result** : (a) original image ; (b) Sangwine’s filter applied from left to right horizontally ; (c) zoom on the hat edge of the (b) picture ; (d) same zoom but with the filter applied from right to left. Thus applying the filter leftwise in one same direction (horizontal, vertical or diagonal) leads to different results than applying it rightwise.

$$q_{dist} = \frac{1}{2}(q_{sum} + \mu q_{sum} \mu) \tag{D.7}$$

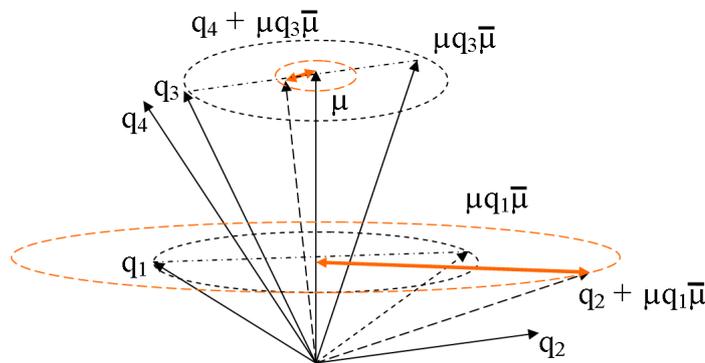


FIG. D.8 – **Proposed quaternionic edge detector** : μ is the grey axis ; $\mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $\mu q_3 \bar{\mu}$) is the rotated vector of q_1 (resp. q_3) around μ with an angle of π ; our comparison vector between q_1 and q_2 (resp. between q_3 and q_4) is given by the distance $q_{dist} = \frac{1}{2}(q_{sum} + \mu q_{sum} \mu)$ of Sangwine’s vector sum $q_{sum} = q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $q_{sum} = q_4 + \mu q_3 \bar{\mu}$) from the grey axis (orange arrows) ; An edge is detected by a high distance from the grey axis like the orange arrow between μ and $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$.

figure D.9 shows that the two distances S_1 and S_2 are equal. Sangwine's filter gives two different colour vectors $q_1 + \mu q_2 \bar{\mu}$ and $q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ for the same two original colours q_1 and q_2 comparison. Note that our new method is thus independent from the path (leftwise or rightwise) applied to convolute the filter with the image whereas Sangwine's is not.

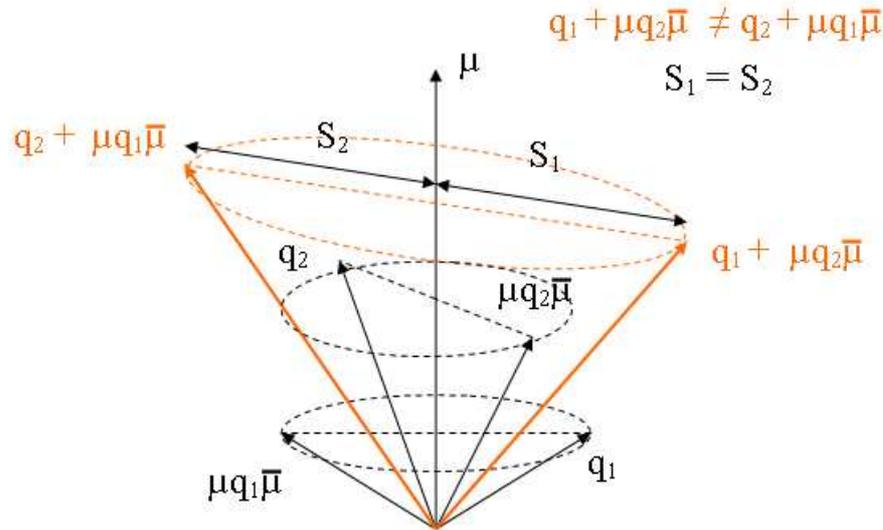


FIG. D.9 – **Difference between Sangwine and our edge detector** : μ is the grey axis ; $\mu q_1 \bar{\mu}$ (resp. $\mu q_2 \bar{\mu}$) is the rotated vector of q_1 (resp. q_2) around μ with an angle of π ; the same colours q_1 and q_2 can give two different colour vectors $q_{sum} = q_2 + \mu q_1 \bar{\mu}$ and $q_{sum} = q_1 + \mu q_2 \bar{\mu}$ by the Sangwine's method. Note that our approach leads to the same distance because $S_1 = S_2$.

This saturation filter is applied to the horizontal, vertical and both diagonal directions. The maximum of these values of saturation at each pixel of the image is then selected to make the final colour gradient filter by maximum distance. Note that this quaternionic filtering operation is linear but the total process is not linear as the "maximum" operator interferes.

figure D.10 shows the results of our experiment where in each row there are first the original image, then the colour gradient and log colour gradient (in order to amplify the edges detected by the colour gradient) and finally the edge map images. This last image is a thresholding on the colour gradient image. The results show that the method detect colour edges quite properly for example with the house image where walls, roof and sky are well separated. The same observation can be done with the well detected separation between Lenna's shoulder and chin. Process our method on images such as the mandrill separates correctly the homogeneous and textures areas. Even if there is still an edge detected between the roof and the top right side of the chimney, we can say that our approach handles shadows quite well. However, because our method uses a comparison of saturation only, the differences of luminance between colours is not detected, see for instance the details of the window's house.

D.3.1.6 Edge detection performance

figure D.11 shows the edge maps obtained using the different methods. The marginal (figure D.11b) and Di Zenzo (figure D.11c) approaches seem to be more sensitive to noise. The edges obtained by our approach (figure D.11f and g) are much thicker and closed. Remember that the first Carron method (figure D.11d) is based on a measure of the hue to weight the marginal gradient ; the second method uses as well the saturation and the luminance measures to weight the gradient when hue is not enough relevant. These methods give closed contours and are not sensitive to noise as the marginal and Di Zenzo ones. Regarding Carron2 approach (figure D.11e), our method cannot distinguish as efficiently shadows to real

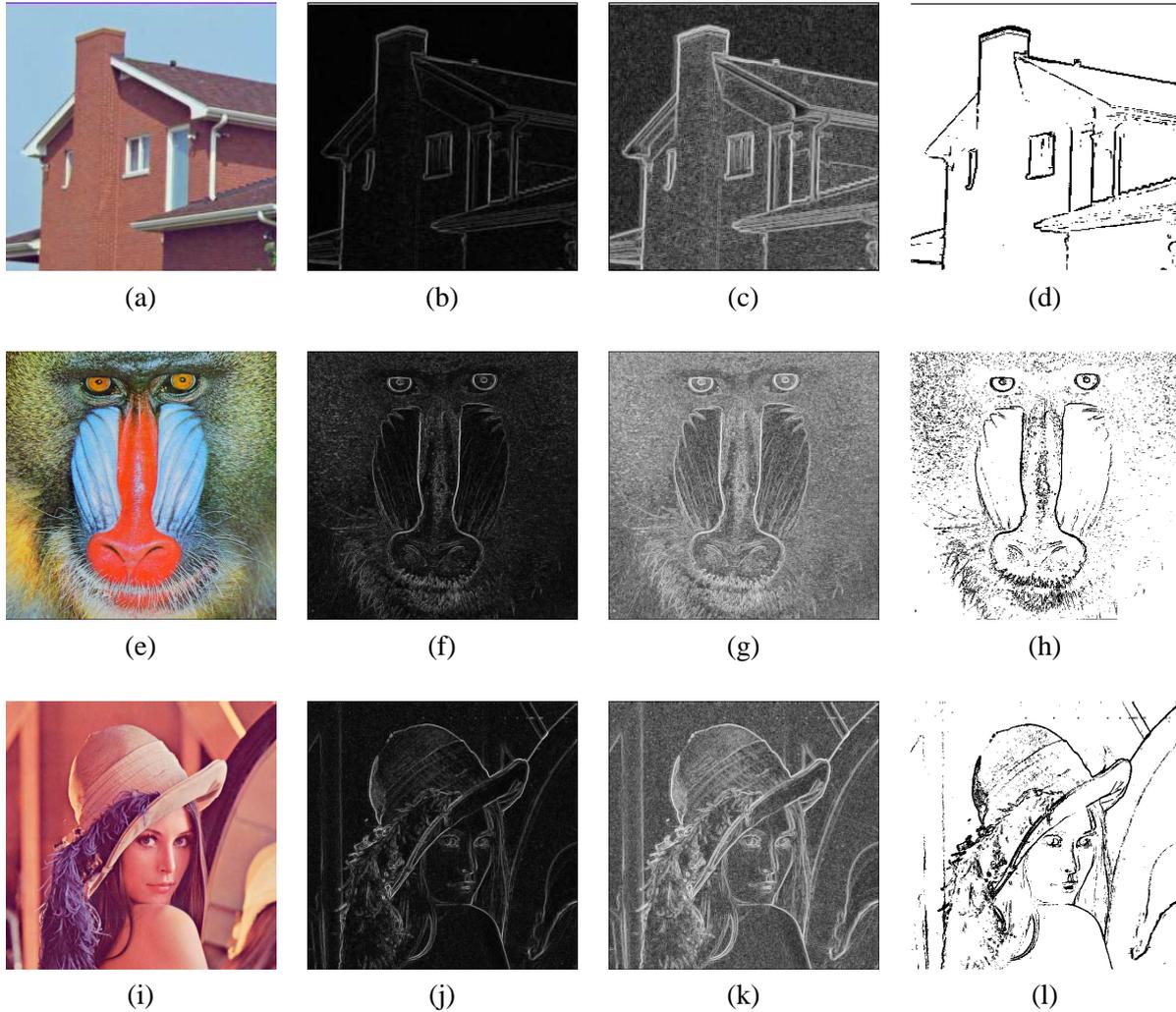


FIG. D.10 – From left to right, original images, colour gradient, log colour gradient and edge map from our new spatial method

contours because our method is based on the saturation only. But this result depends on the thresholding done on the colour gradient. Indeed the shadows contours can be erased from our edge map but at the price of thinner edges everywhere else (see figure D.10d for example).

To improve our algorithm and take shadows into account we need to check if the saturation measure is self-sufficient. Indeed, two different colours can have the same saturation. It is the case for instance with q_1 and q_2 on one hand and q_3 and q_4 on the other hand as we saw in figure D.5. Even so, q_1 and q_2 are different colours as well as q_3 and q_4 , fortunately they can be disjoined by their difference of luminance and/or hue. Implementing these luminance and chromaticity measures (as the Carron2 method does) when saturation is not enough relevant should enhance the performance of our approach.

Even with this lack of improvement, our edge detector is quite efficient with an implementation using quaternion formalism and the results are given without performing any change of colour space so imprecisions due to these digital manipulations of colours are avoided. Moreover, it should be noted that our edge detector is based on a vectorial approach and does not need any additional definition to sort colours. Our distance is a saturation one that does not give more importance for a specified colour than for another one, speaking at the same saturation level. Finally, our method is more similar to a perceptual one than those based on RGB colour space as it uses geometric concepts from HSV colour space for example.

D.3.1.7 Computational complexity

To compare the computational complexity of the proposed approach and the traditional marginal colour gradient operator, the quaternionic operations have to be expressed in terms of the traditional real operations such as multiplications and additions. Let $mult_q$ (resp. $mult_r$) stand for quaternionic (resp. real) multiplication, add_q (resp. add_r) quaternionic (resp. real) addition :

- $add_q = 4 add_r$
- $mult_q = 4 * 4 mult_r + 4*3 add_r$

We apply Sangwine algorithm and then we calculate the distance of the colour sum vector results from the grey axis. Note that the calculations will be performed for a $N \times N$ image.

- Sangwine algorithm :

Remember that for each pixel we apply two convolutions by a 3×3 window, one with the quaternion Q and one with \overline{Q} (cf. equations (D.5) and (D.6)).

$$n_{Sang} = N^2(2 * (6mult_q + 5add_q))$$

In fact, since each convolution implies three zero coefficients, only 6 quaternionic multiplications and 5 quaternionic additions are needed.

- Distance calculation :

For each pixel again we calculate the saturation distance as seen in equation (D.7).

$$n_{Dist} = N^2(add_q + 2mult_q)$$

Then as we process the Sangwine filter on horizontal, vertical and both diagonal directions :

$$\begin{aligned} n_{Total} &= 4 * (n_{Sang} + n_{Dist}) \\ &= 4 * (N^2(2 * (6 mult_q + 5 add_q)) + N^2(add_q + 2 mult_q)) \\ &= N^2(832 mult_r + 768 add_r) \end{aligned}$$

For a classical marginal gradient, the same kind of Prewitt filter is needed, but we only apply it one time on each colour component. We then apply it on the same four directions and the number of operations needed is about $N^2(28mult_r + 20add_r)$.

We can see that our method is using much more operations than the classical one so the computation time is increased (linearly and not exponentially). However, it should be noted that the complexity is not changed as both methods are in $\mathcal{O}(N^2)$ and the results obtained using the proposed approach are better than the ones obtained using a marginal method.

D.3.2 Frequency filtering

Our approach is built on the same idea used to filter greyscale images : DQFT is performed on a colour image leading to its the frequential information. We then apply a mask on this Fourier information by setting its either low or high frequency coefficients to zero. Eventually, the result is processed through IDQFT to give the filtered image.

We use the quaternion formalism to encode colour images but we need to stay aware on the fact that the quaternionic product is not commutative. Indeed, the well known theorem which states that a convolution product in spatial domain is equal to the product in the Fourier space is not true with quaternions [55].

By definition, the formulation of our Fourier filtering approach is given by

$$q_{Filt} = IDQFT\{H.Q\} \tag{D.8}$$

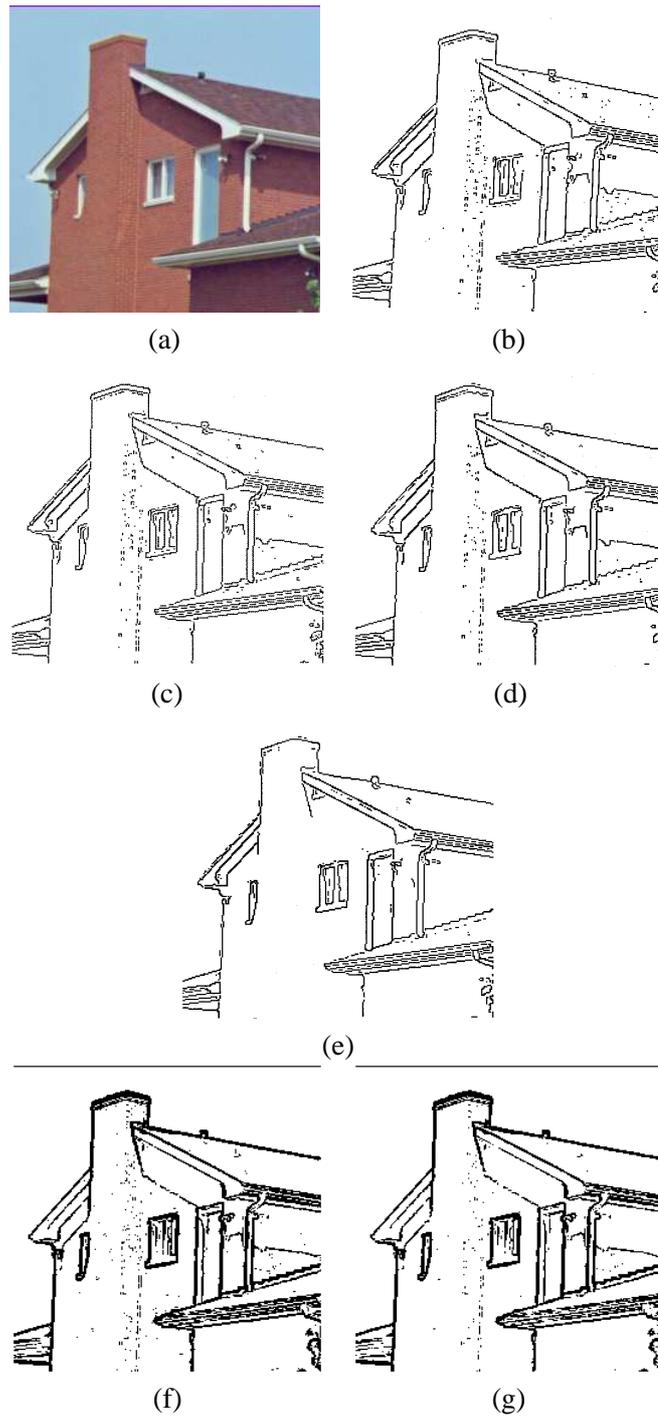


FIG. D.11 – **Different spatial gradients on the "house" image** : (a) "House" original image ; (b) Marginal approach ; (c) Di Zenzo approach ; (d) First Carron approach ; (e) Second Carron approach ; (f) our method ; (g) our method with logarithmic approach.

with $Q = DQFT(q)$ denotes the quaternionic Fourier transform of the original image and H the frequency behavior of the filter.

To compare the frequential filtering to the spatial one, we focus on the high-pass filtering

$$H(S, T) = 1 \text{ for } (|S| > a, |T| > b) \text{ and } 0 \text{ otherwise, with } a, b \in \mathbb{R}$$

Indeed we notice through the quaternionic spectrum study that there is a likeness of organisation as in the classical complex spectrum. As a consequence, high frequency selection will give weight to ruptures and thus contours.

figure D.12 shows that frequency filtering preserves the original colours and the high frequency content is really isolated from the rest of the image. In fact, the contours of the top and bottom boxes appear green and white in figure D.12g and the circle and quadrilateral are red and blue in figure D.12h as in the original image (figure D.12e). These remarks are also valid on the contours made on the Lenna image as we can see the details of her hat in figure D.12c and mouth in figure D.12d. We see that information on edges is vectorial as it appears in colours. A scaling process between 0 and 255 has been made after IDQFT using the min and max of each component. As the method uses the windowing concept to filter the image in the frequency domain, we can observe that there are some oscillations on edges detected in the high-pass filtered pictures. This windowing process in the quaternionic spectral domain leads to equivalent artefacts than those produced if it was done on a greyscale image spectrum : the Fourier transform of the rectangle function is the sinc (sine cardinal) function. However, even if this statement is not true anymore with the formalism of quaternions (from the anti-commutativity of the product), we observe that it still remains the same kind of border effects. Note that the colour artefacts are just the conjugate colours of the edges in the RGB colour domain as we see in figure D.12h where the red (resp. blue) colour of the circle (resp. quadrilateral) is oscillating with green (resp. yellow).

figure D.13 shows that this spectrum strategy is at least good enough to detect colour edges properly. A edge map is made by thresholding the absolute values of the filtered images. This method seems however more sensitive to small details than the one presented on the spatial filtering section but it may give more details than the spatial approach with not saturated colours. Indeed we can see in figure D.13c that the gutters and drainpipes of the roof are well detected by the frequential method. They are not detected by the spatial one because they are quite white (white has a zero saturation level). Furthermore, this approach can filter both in low-pass and high-pass bands and it can be generalized to band-pass by selecting the proper windowing scheme in the spectrum domain.

Notice that the experiments show only results with the μ parameter of the DQFT and IDQFT equal to μ_{grey} . Finally taking the interpretation of the quaternionic spectrum of the first section we may be able to make spectrum filters which can extract only one component or any combinaison of them.

Speaking about performances, it takes two classical complex fast Fourier transforms to perform a DQFT or IDQFT. To process both DQFT and IDQFT is so equivalent to a complexity in $\mathcal{O}(N^2 \ln(N^2))$. The windowing process is a product term by term between the spectrum and a 2D rectangle function. This process has a complexity in $\mathcal{O}(N^2)$. The all method uses the two previous algorithms leading the total complexity of the process in $\mathcal{O}(N^2 + N^2 \ln(N^2)) = \mathcal{O}(N^2 \ln(N^2))$. This is a bit slower than the spatial method.

D.4 Conclusion

In this paper, we analysed the properties of the quaternionic Fourier spectrum. This contributed first, to reconstruct after IDQFT and without any loss of information a quaternionic spatial colour image composed of three imaginary components only. Secondly, this gave us an interpretation of quaternionic Fourier coefficients influence on the spatial domain with both calculus and graphical illustrations. When initializing the real part of the spectrum with a pair of constants respecting proper symmetries, the corresponding spatial domain presents odd oscillations dependent on the μ parameter of the transformation. However, spectrum pairs of Dirac initialization made on imaginary component influences the spatial domain with even oscillations independently from the μ parameter. As in the complex Fourier analysis, the quaternionic spectrum can be used to detect spatial orientations. Then in a second part, we applied the previous digital concepts to propose a new quaternionic colour vectorial gradient. This gave enthusiastic results as its takes advantages of both vectorial and perceptual approaches of spatial filtering for a RGB colour space approach. In addition, we used the interpretation of the spectrum to create frequency quaternionic filters that gave similar results than complex frequency filters on greyscale images. In that way,

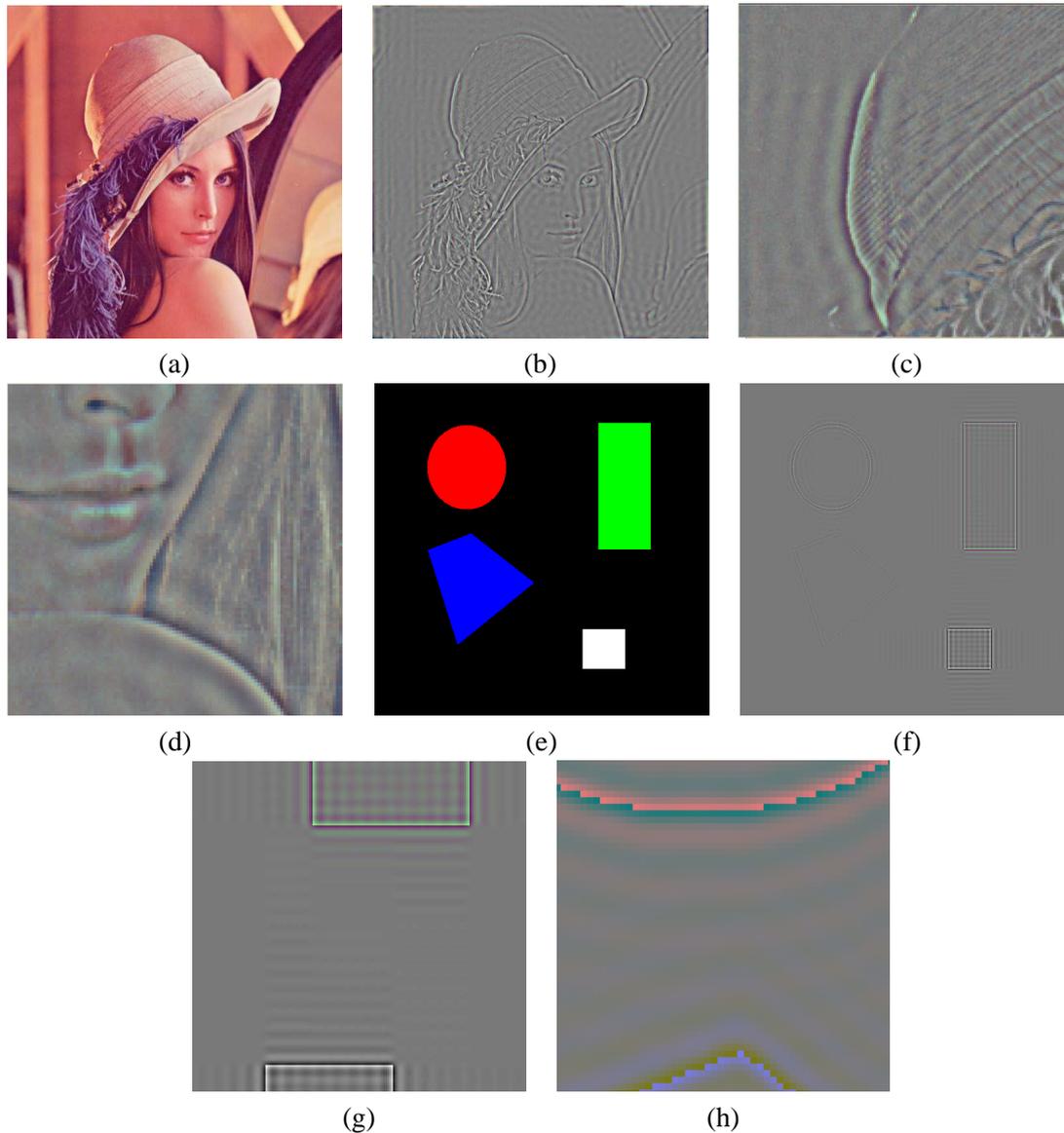


FIG. D.12 – **Quaternionic high-pass filtering results** : (a) Lenna original image ; (b) highpass filter applied on (a) ; (c) details of the hat ; (d) details of the face ; (e) hand-made colour image ; (f) high-pass filter applied on (e) ; (g) details of the green and white boxes edges ; (h) details of the red circle and blue quadrilateral edges. Frequency filtering preserves the original colours.

both spatial and spectrum approaches have been discussed to get a wider vision on filtering with quaternions. Perspectives are first to enhance the spatial vectorial filter in order to take the saturation reluctance into account, thus achieving higher efficiency by giving more power to intensity and hue values when needed. The frequential approach can as well be improved first by using a smoother function than the rectangle one to process the spectrum filtering and soften the border effects leading to colour artefacts. Secondly, we can select in the Fourier domain the wanted components as described by the spectrum interpretation of the first section. Finally, as quaternions do not seem to give information to compare colour components between themselves but more independent component analysis, geometric algebra which manipulates vectors but also multivectors may represent a useful tool to achieve new results.

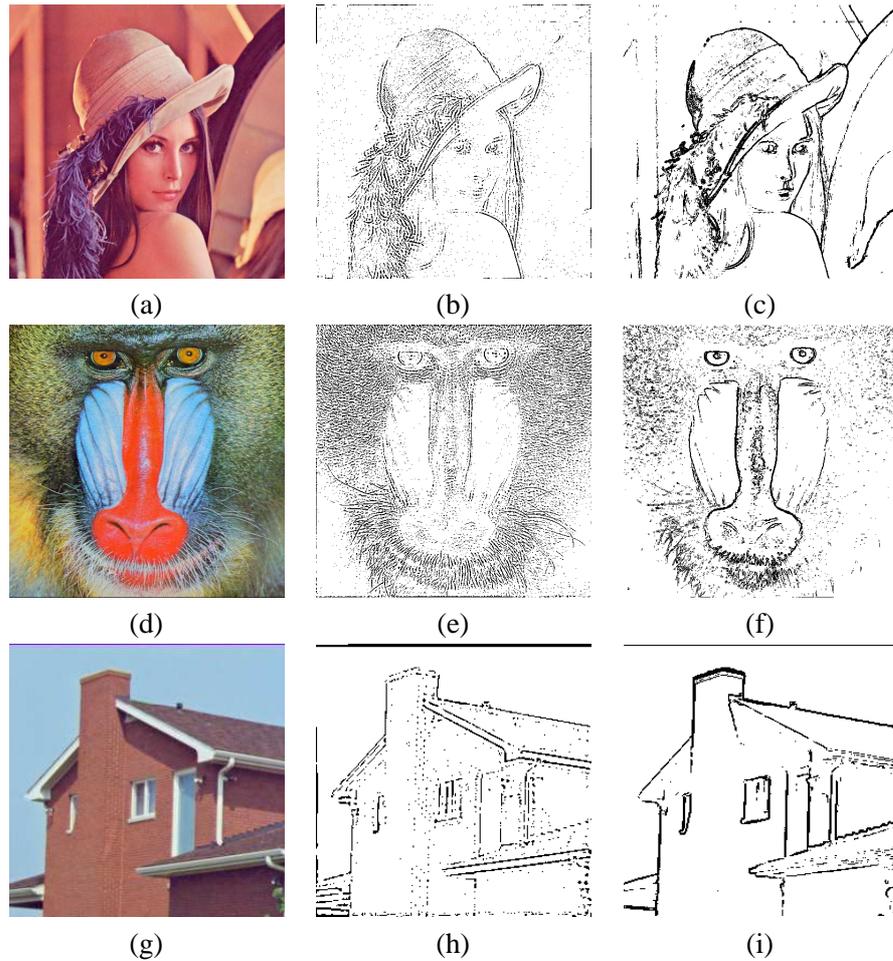


FIG. D.13 – Comparison between high-pass and spatial filtering : (a) Lenna original image ; (b) high-pass filtering’s edge map ; (c) spatial gradient’s edge map ; (d) mandrill original image ; (e) highpass filtering’s edge map ; (f) spatial gradient’s edge map ; (g) house original image ; (h) highpass filtering’s edge map ; (i) spatial gradient’s edge map.

D.5 Appendix

D.5.1 Digital study of the colour spectrum

This section shows more details on how, an initialization made in the quaternionic spectrum, influences the spatial domain after IDQFT.

A problem relies on the fact that the spectrum must present the previous symmetry conditions (refer to section D.2.2), and thus the pixel at coordinates $(-S_0, -T_0)$ must be initialized with amplitude that respects the conditions. Eventually there are two points initialized in the spectrum in order to find a spatial image after IQFT without any loss of information. There are different cases for initialization, as reported in the following.

- Initialization on the real component

In this case, the initialization requires the $Q_r(S_0, T_0) = K_r$ and $Q_r(-S_0, -T_0) = -K_r$ conditions. After IDQFT the spatial image is represented on its imaginary components as follows :

$$\begin{aligned} q_r(s, t) &= 0 \\ q_i(s, t) &= 2K_r\mu_i \sin\left(2\pi\left(\frac{S_0s}{N} + \frac{T_0t}{M}\right)\right) \\ q_j(s, t) &= 2K_r\mu_j \sin\left(2\pi\left(\frac{S_0s}{N} + \frac{T_0t}{M}\right)\right) \\ q_k(s, t) &= 2K_r\mu_k \sin\left(2\pi\left(\frac{S_0s}{N} + \frac{T_0t}{M}\right)\right) \end{aligned}$$

Initialize the real component of the spectrum leads, after IQFT process, to odd variations (for the sinus is an odd function). These variations are described by the imaginary component(s) used to set the analysing direction $\mu = \mu_i i + \mu_j j + \mu_k k$. As for a classical frequency representation, we observe that the frequency coordinates (S_0, T_0) are associated with the direction and the repetition density of the analyzed pattern.

– *Initialization on an imaginary component*

In this case the initialization requires $Q_e(S_0, T_0) = Q_e(-S_0, -T_0) = K_e$ (with $e = i, j$ or k) conditions. After IDQFT the spatial image corresponding to e-imaginary component is represented on its following cartesian form

$$\begin{aligned} q_e(s, t) &= 2K_e \cos\left(2\pi\left(\frac{S_0s}{N} + \frac{T_0t}{M}\right)\right) \\ q_{e'}(s, t) &= 0 \text{ with } e' \neq e \end{aligned}$$

Initialize an (several) imaginary component(s) of the spectrum leads, after IQFT process, to even oscillations (for the cosinus is a even function) described on the same imaginary component(s). We observe that the analysing direction μ chosen in the IDQFT has no influence.

D.5.2 Quaternionic Graphical Spectrum Illustration

D.5.2.1 Initialization on a spectrum's imaginary part with any $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$

As we saw in the previous section, to set a pair of constants that follows the necessary conditions on one imaginary component of the quaternionic spectrum leads to a spatial oscillation on the same component after processing IDQFT (cf. figure D.14). For example if the initialization is done on the first frequency component, the spatial oscillations that arise from IDQFT are on the first spatial component coding the image, that is to say the red channel if working in RGB colour space. The initialization can be done on several components, in that case, the result affects the same components that have been modified. In our case as the following examples are taken from a RGB colour space, multiple initializations (always under the conditions for correct spatial reconstruction) on the spectrum produce spatial oscillations following the rules of the additive synthesis of colours. So if we initialize the spectrum on each imaginary component with the same couple of constants, the spatial result after IDQFT on a RGB colour space is grey oscillations. The μ parameter does not interfere in this case.

D.5.2.2 Initialization on the spectrum's real part with any $\mu \in \mathbb{S} \cap \mathbb{P}$ but $\mu \neq \mu_{Grey}$

It was shown in Section D.2.3 that the initialization on the spectrum could be done on the real component. In that case, we can also get different kinds of oscillations after IDQFT was performed, thus showing that the conditions enunciated before are preserved. Oscillations after IQFT process are on the same imaginary components involved in the initialization of the pure unit quaternion direction μ . In other words, working in RGB colour space implies that, to get red oscillations, the μ parameter must be equal to i (cf. figure D.15). Oscillations composed of numerous colours can be achieved in setting the μ parameter properly, for instance $\mu = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$ leads to yellow variations in the RGB colour space after IDQFT.

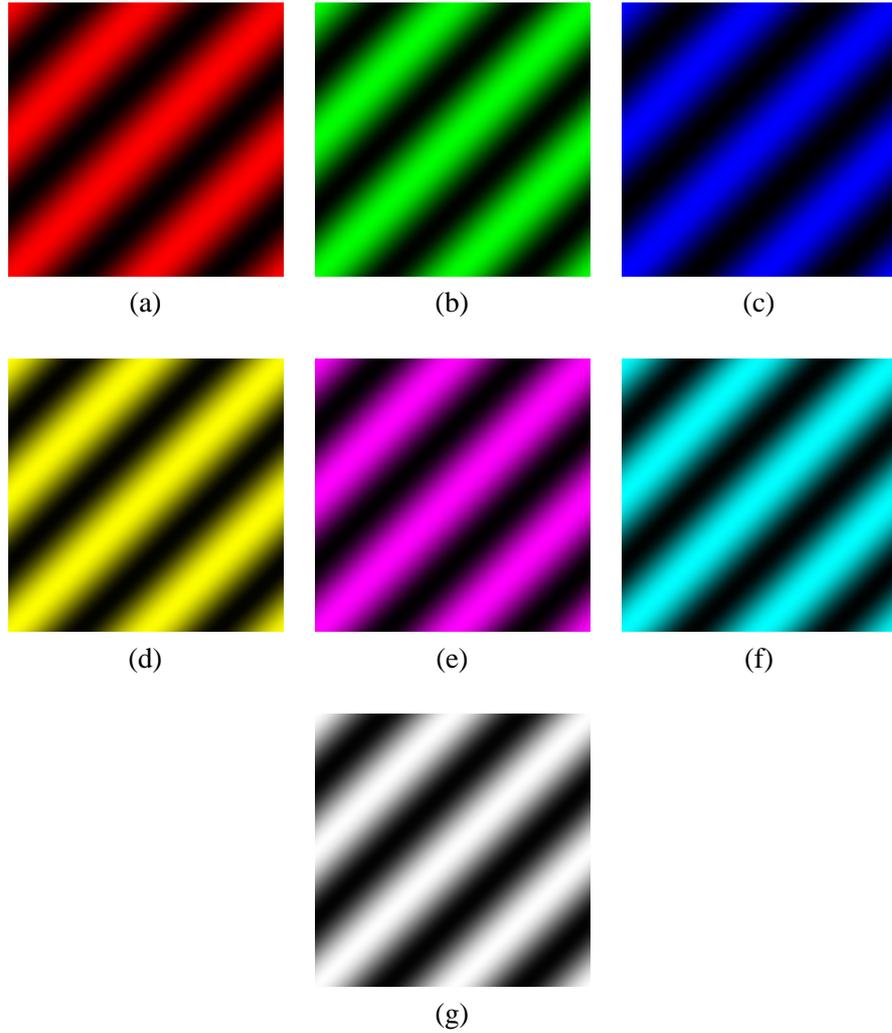


FIG. D.14 – Initialization examples with $\mu = \mu_{Grey} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$: (a) $Q_i(2, 2) = Q_i(-2, -2) = K_i$; (b) $Q_j(2, 2) = Q_j(-2, -2) = K_j$; (c) $Q_k(2, 2) = Q_k(-2, -2) = K_k$; (d) $Q_i(2, 2) = Q_i(-2, -2) = K_i$ and $Q_i(2, 2) = Q_i(-2, -2) = K_i$; (e) $Q_j(2, 2) = Q_j(-2, -2) = K_j$ and $Q_j(2, 2) = Q_j(-2, -2) = K_j$; (f) $Q_k(2, 2)Q_k(-2, -2) = K_k$ and $Q_k(2, 2) = Q_k(-2, -2) = K_k$; (g) $Q_i(2, 2) = Q_i(-2, -2) = K_i$, $Q_j(2, 2) = Q_j(-2, -2) = K_j$ and $Q_k(2, 2) = Q_k(-2, -2) = K_k$.

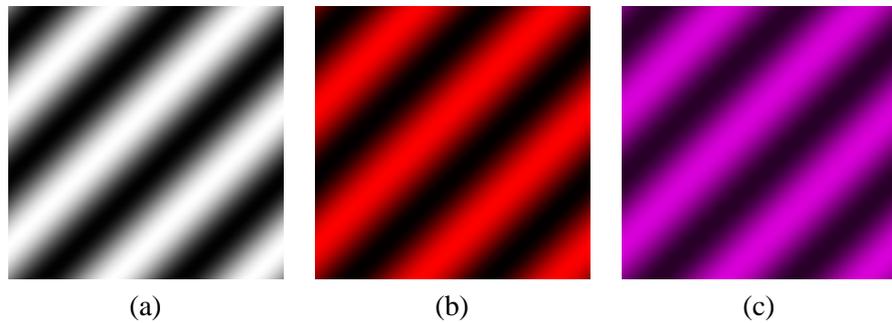


FIG. D.15 – Initialization examples with $\mu \neq \mu_{Grey}$ and $Q_r(2, 2) = -Q_r(-2, -2) = K_r$ (a) $\mu_{Grey} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}$; (b) $\mu_{Red} = i$; (c) $\mu_{Magenta} = \frac{i+k}{\sqrt{2}}$.

D.5.2.3 Geometric Variations

In the complex plane, coordinates of the spectrum coefficients involved in the quaternionic Fourier space’s initialization are really important parameters. Indeed, the resulting oscillations by IDQFT process

have a geometric orientation linked to this. Supposing that coordinates are given in \mathbb{Z}^2 with the pixel $O(0,0)$ in the image centre (whereas on the top-left corner as often), the initialization of the spectrum at coordinates (S_0, T_0) and $(-S_0, -T_0)$ results, through IDQFT process, in a 2D oscillation (sinus and cosinus) following the axis made by this two pixels.

In figure D.16, numerous geometric oscillations are shown by modifying the coordinates of the pixels pair implicated by the initialization but with the same way to set the spectrum components.

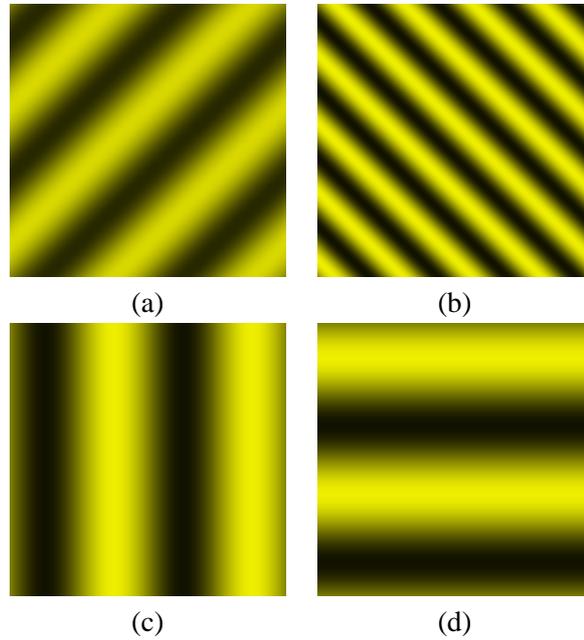


FIG. D.16 – **Geometric oscillation examples initialization with $\mu_{Yellow} = \frac{i+j}{\sqrt{2}}$** (a) $Q_r(2,2) = -Q_r(-2,-2) = K_r$; (b) $Q_r(4,-4) = -Q_r(-4,4) = K_r$; (c) $Q_r(0,2) = -Q_r(0,-2) = K_r$; (d) $Q_r(2,0) = -Q_r(-2,0) = K_r$.

PUBLICATIONS PERSONNELLES

Revue internationale

- P. Denis, P. Carré and C. Fernandez-Maloigne, *Spatial and spectral Quaternionic approaches for Colour Images*, in Computer Vision and Image Understanding, Issues 1-2, Special issue on color image processing, vol.107, pp.74–87, July 2007.

Conférences internationales avec comité de lecture

- P. Denis, P. Carré, *Colour Gradient using Geometric Algebra*, EUSIPCO2007, 15th European Signal Processing Conference, Poznań, Poland - September 2007.
- P. Carré, P. Denis, *Quaternionic Wavelet Transform for Colour Images*, Wavelet Applications in Industrial Processing IV, SPIE Optics East Symposium, Boston, October 2006.

Conférence nationale avec comité de lecture

- P. Denis, P. Carré, *Méthode de détection de contours utilisant l'Algèbre Géométrique \mathcal{G}_3* , GRETSI2007, 21ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images. Troyes, France - Septembre 2007.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Robert ARGAND : *Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Gauthier Villars, Paris, deuxième édition, 1874.
- [2] Patrick BAS, Nicolas LE BIHAN et Jean-Marc CHASSERY : Color watermarking using quaternion fourier transform. *In IEEE International conference on Acoustics Speech and Signal Processing (ICASSP)*, volume 3, pages 521–524, 2003.
- [3] Patrick BAS, Nicolas LE BIHAN et Jean-Marc CHASSERY : Utilisation de la transformée de fourier quaternionique en tatouage d’images couleur. *In Colloque GRETSI*, Paris, France, Septembre 2003.
- [4] Eduardo BAYRO-CORROCHANO : Multiresolution image analysis using the quaternion wavelet transform. *Numerical Algorithms*, 39:35–55, 2005.
- [5] Ronald BRACEWELL : *The Fourier transform and its applications*. McGraw Hill, March 1986.
- [6] Fred BRACKX, Nele DE SCHEPPER et Frank SOMMEN : The clifford-fourier transform. *The Journal of Fourier Analysis and Applications*, 11,6:669–681, December 2005.
- [7] Fred BRACKX, Nele DE SCHEPPER et Frank SOMMEN : The two-dimensional clifford-fourier transform. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 26,1-2:5–18, 2006.
- [8] Thomas BÜLOW : *Hypercomplex Spectral Sinal Representations for the processing and Analysis of Images*. Thèse de doctorat, Christian Albrechts University of Kiel, August 1999.
- [9] Thomas BÜLOW et Sommer GERALD : Multi-dimensional signal processing using an algebraically extended signal representation. *In J.J. Koenderink (Eds.) G. SOMMER, éditeur : Proc. Int. Workshop on Algebraic Frames for the Perception-Action Cycle*, volume 1315, pages 148–163, Kiel, LNCS, 1997. Springer-Verlag.
- [10] Philippe CARRÉ et Patrice DENIS : Quaternionic wavelet transform for colour images. *In Wavelet Applications in Industrial Processing IV*, volume 6383, Boston, Massachusetts, USA, October 2006.
- [11] Thierry CARRON : *Segmentation d’images couleur dans la base Teinte-Luminance-Saturation : approche numérique et symbolique*. Thèse de doctorat, Université de Savoie, dec 1995.
- [12] Wai L. CHAN, Hyeokho CHOI et Richard G. BARANIUK : Directional hypercomplex wavelets for multidimensionak signal analysis and processing. *In Intl Conf. on Image Processing*. IEEE, May 2004.
- [13] Wai L. CHAN, Hyeokho CHOI et Richard G. BARANIUK : Coherent image processing using quaternion wavelet. Rapport technique, Rice University, 2005.
- [14] Sylvain CHARNEAU : *Algèbre géométrique et lancer de rayons*. Mémoire de D.E.A., Université de Poitiers, Juin 2004.
- [15] CIE : *Compte rendu de la huitième session*. Rapport technique, Cambridge University Press, Cambridge, 1931.
- [16] Jean-Pierre COCQUEREZ et Sylvie PHILIPP : *Analyse d’image : filtrage et segmentation*, pages 21–22. Masson, Septembre 1995. ISBN=978-2-225-84923-7.

- [17] Patrice DENIS : Fourier et images couleur. Mémoire de D.E.A., Université de Poitiers, Juin 2004.
- [18] Patrice DENIS et Philippe CARRÉ : Colour gradient using geometric algebra. In *EUSIPCO2007, 15th European Signal Processing Conference*, Poznań, Poland, September 2007.
- [19] Patrice DENIS et Philippe CARRÉ : Méthode de détection de contour couleur utilisant l'algèbre géométrique g3. In *GRETSI07, 21ème Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Troyes, France, Septembre 2007.
- [20] Patrice DENIS, Philippe CARRÉ et Christine FERNANDEZ-MALOIGNE : Spatial and spectral quaternionic approaches for colour images. *Computer Vision and Image Understanding*, 107:74–87, July 2007.
- [21] Silvano DI ZENZO : A note on the gradient of multi-image. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 33:116–125, 1986.
- [22] Leo DORST et Stephen MANN : Geometric algebra :a computational framework for geometrical applications (part i :algebra). *Computer Graphics and Applications, IEEE*, 22,3:24–31, May/June 2002.
- [23] Julia EBLING et Gerik SCHEUERMANN : Clifford convolution and pattern matching on vector fields. In *IEEE Visualization*, pages 193–200, 2003.
- [24] Julia EBLING et Gerik SCHEUERMANN : Clifford fourier transform on vector fields. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 11,4:469–479, July/August 2005.
- [25] Julia EBLING et Gerik SCHEUERMANN : Template matching on vector fields using clifford algebra. In *International Conference on the Applications of Computer Science and Mathematics in Architecture and Civil Engineering (IKM 2006)*, 2006.
- [26] Todd A. ELL : *Hypercomplex spectral transformation*. Thèse de doctorat, University of Minnesota, 1992.
- [27] Todd A. ELL et Stephen John SANGWINE : Decomposition of 2d hypercomplex fourier transforms into pairs of fourier transforms. In *Proc. EUSIPCO*, pages 151–154, 2000.
- [28] Todd A. ELL et Stephen John SANGWINE : Hypercomplex wiener-kintchine theorem with application to color image correlation. In *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 2, pages 792–795, 2000.
- [29] Todd A. ELL et Stephen John SANGWINE : Hypercomplex fourier transform of color images. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 16,1:22–35, January 2007.
- [30] Michael FELSBURG : *Low-Level Image Processing with the Structure Multivector*. Thèse de doctorat, Christian Albrechts University of Kiel, March 2002.
- [31] Michael FELSBURG et Gerald SOMMER : Optimized fast algorithms for the quaternionic fourier transform. *8th Int. Conference on Computer Analysis of Images and Patterns*, 1689:209–216, 1999.
- [32] Christine FERNANDEZ MALOIGNE, Mohamed Chaker LARABI, Benjamin BRINGIER et Richard NOËL : Spatial-temporal characteristics of the visual brain and their effects on colour quality evaluation. In *AIC International Conference*, Granada, Spain, May 2005.
- [33] Joseph FOURIER : *Théorie analytique de la chaleur*. Firmin Didot Père et Fils, Paris, réédition (1988) jacques gabay édition, 1822. ISBN 2-87647-046-2.
- [34] Dennis GABOR : Theory of communication. *J. IEE (London)*, 93,3:429–457, November 1946.
- [35] Philippe-Henri GOSSELIN : Quaternions et images couleur. Mémoire de D.E.A., Université de Poitiers, 2002.
- [36] William Rowan HAMILTON : *Elements of Quaternions*. Longman London U.K., 1866.
- [37] David HESTENES : *New Foundations for Classical Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, 2 édition, 1986.

- [38] David HESTENES et Garret SOBczyk : *Clifford Algebra to Geometric Calculus : A Unified Language for Mathematics and Physics*. Reidel, Dordrecht, 1984.
- [39] D.H. KELLY : Spatiotemporal variation of chromatic and achromatic contrast thresholds. *Journal of the Optical Society of America*, 73, 6:742–750, June 1983.
- [40] Joan LASENBY, Anthony N. LASENBY et Chris J. L. DORAN : A unified mathematical language for physics and engineering in the 21st century. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 358:21–39, 2000.
- [41] Nicolas LE BIHAN et Jérôme MARS : New 2d complex and hypercomplex seismic attributes. *In 71st Conference of the Society of Exploration Geophysicists (SEG)*, San Antonio, USA, September 2001.
- [42] Nicolas LE BIHAN et Stephen John SANGWINE : Quaternion principal component analysis of color images. *In IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, pages 809–812, 2003.
- [43] Rastislav LUKAC et Konstantinos N. PLATANIOTIS : A taxonomy of color image filtering and enhancement solutions. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 140:187–264, 2006.
- [44] Rastislav LUKAC, Konstantinos N. PLATANIOTIS, Anastasios N. VENETSANOPOULOS, Robert BIEDA et Smolka BOGDAN : Color edge detection techniques. *Signaltheorie und Signalverarbeitung, Akustik und Sprachakustik, Informationstechnik*, 29:21–4, 2003.
- [45] Rastislav LUKAC, Bogdan SMOLKA, Karl MARTIN, Konstantinos N. PLATANIOTIS et Anastasios N. VENETSANOPOULOS : Vector filtering for color imaging. *IEEE Signal Processing Magazine*, 22-1:74–86, January 2005. Special Issue on Color Image Processing.
- [46] Stéphane MALLAT : *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, 1998.
- [47] Bahri MAWARDI et Eckhard MS HITZER : Clifford fourier transformation and uncertainty principle for the clifford geometric algebra $cl_{3,0}$. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 16,1:41–61, February 2006.
- [48] Andrew MCCABE, Terry CAELLI, Geoff WEST et Adam REEVES : Encoding and processing spatio-chromatic image information using complex fourier transform methods. Rapport technique 4, School of Computing, Curtin University of Technology, Australia, 1997.
- [49] C.E. MOXEY, Stephen John SANGWINE et Todd A. ELL : Vector correlation of colour images. *In First European Conference on Colour in Graphics, Imaging and Vision (CGIV 2002)*, pages 343–347, July 2002.
- [50] C.E. MOXEY, Stephen John SANGWINE et Todd A. ELL : Hypercomplex correlation techniques for vector images. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51:1941–1953, July 2003.
- [51] Yuichi OHTA, Takeo KANADE et Toshiyuki SAKAI : Color information for region segmentation. *Computer Graphics and Image Processing*, 13(3):222 – 241, July 1980.
- [52] Sofia OLHEDE et Georgios METIKAS : The hyperanalytical wavelet transform. Rapport technique TR-06-02, Imperial College London, May 2006.
- [53] Soo-Chang PEI, Ja-Han CHANG et Jian-Jiun DING : Commutative reduced biquaternions and their fourier transform for signal and image processing applications. *IEEE Trans. Signal Processing*, 52,7:2012–2031, November 2004.
- [54] Soo-Chang PEI et Ching-Min CHENG : Novel block truncation coding of image sequences for limited-color display. *In ICIAP '97 : Proceedings of the 9th International Conference on Image Analysis and Processing-Volume II*, pages 164–171, London, UK, 1997. Springer-Verlag.
- [55] Soo-Chang PEI, Jian-Jiun DING et Ja-Han CHANG : Efficient implementation of quaternion fourier transform, convolution, and correlation by 2-d complex fft. *IEEE Trans. Signal Processing*, 49: 2783–2797, November 2001.
- [56] Konstantinos N. PLATANIOTIS et Anastasios N. VENETSANOPOULOS : *Color Image Processing and Applications*. Springer Verlag, 2000.

- [57] Allen B. POIRSON et Brian A. WANDELL : Pattern-color separable pathways predict sensitivity to simple colored patterns. *Vision Research*, 36, 4:515–526, 1996.
- [58] Mikhaïl POSTNIKOV : *Leçons de géométrie : Groupes et algèbres de Lie*. Editions MIR, Moscou, 1982.
- [59] S. A. REDFIELD et Q. Q. HUYNH : Hypercomplex fourier transforms applied to detection for side-scan sonar. In *IEEE International conference on oceanic Engineering (OCEANS)*, volume 4, pages 2219–2224, Biloxi, October 2002.
- [60] Stephen John SANGWINE : Fourier transforms of colour images using quaternion, or hypercomplex, numbers. *Electronics Letters*, 32, 21:1979–1980, October 1996.
- [61] Stephen John SANGWINE : The discrete quaternion fourier transform. In *Proceedings of the 6th International Conference on Image processing and its applications*, volume 2, 14-17, pages 790–793, July 1997.
- [62] Stephen John SANGWINE : Colour image edge detector based on quaternion convolution. *Electronics Letters*, 34, 10:969–971, May 1998.
- [63] Stephen John SANGWINE : Colour in image processing. *Electronics and Communication Engineering Journal*, 12,5:211–219, October 2000.
- [64] Stephen John SANGWINE et Todd A. ELL : Hypercomplex auto- and cross-correlation of color images. In *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, volume 4, pages 319–322, 1999.
- [65] Stephen John SANGWINE et Todd A. ELL : Hypercomplex fourier transforms of colour images. In *Proceedings ICIP*, pages 137–140, 2001.
- [66] Stephen John SANGWINE et Todd A. ELL : Mathematical approaches to linear vector filtering of colour images. In *First European Conference on Colour in Graphics, Imaging and Vision (CGIV 2002)*, July 2002.
- [67] Michael SCHLEMMER, Hans HAGEN, Ingrid HOTZ et Bernd HAMANN : Clifford pattern matching for color image edge detection. *Visualization of Large and Unstructured Data Sets, GI-Edition Lecture Notes in Informatics (LNI)*, 4, 2006.
- [68] Lilong SHI et Brian FUNT : Quaternion color texture segmentation. *Computer Vision and Image Understanding*, 107:88–96, July 2007.
- [69] Alain TRÉMEAU : *Contribution des modèles de la perception visuelle à l'analyse d'images couleur*. Thèse de doctorat, Université Jean Monnet de Saint-Étienne, Octobre 1993.
- [70] Alain TRÉMEAU, Christine FERNANDEZ-MALOIGNE et Pierre BONTON : *Image numérique couleur. De l'acquisition au traitement*. Dunod, Janvier 2004.
- [71] Martin VETTERLI et Jelena KOVAČEVIĆ : *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995.
- [72] Brian A. WANDELL : Color appearance : The effects of illumination and spatial pattern. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.)*, 90, 21:9778–9784, 1993.

Quaternions et Algèbres Géométriques, de nouveaux outils pour les images numériques couleur

Résumé Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le contexte du traitement et de l'analyse des images couleur. Les premiers travaux pour traiter ces images consistaient à appliquer des traitements déjà existant en niveaux de gris marginalement sur les trois composantes constituant la couleur et le plus généralement dans l'espace RVB . Ces traitements ont été peu à peu améliorés notamment par l'utilisation d'espaces couleur d'avantage liés à la perception humaine mais aussi par des approches vectorielles. Dans ce travail de thèse nous nous plaçons dans la continuité de ces travaux et nous proposons une modélisation mathématique de la dimension vectorielle dans le but de manipuler les couleurs de manière globale. Trois formalismes sont présentés pour représenter la couleur : les complexes, les quaternions et les algèbres géométriques. Dans ce cadre, il est proposé de définir de nouveaux outils d'analyse couleur avec notamment une caractérisation numérique fréquentielle de chacun de ces modèles. Une étude approfondie de leurs utilisations permet de faire ressortir leurs propriétés ainsi que leurs principaux avantages et inconvénients à savoir : impossibilité des complexes à représenter les vecteurs couleurs qui par nature s'expriment en trois dimensions minimum contrairement aux quaternions et aux algèbres géométriques ; distinction entre objets manipulés (vecteurs couleur) et opérations effectuées sur ces objets (projections, rotations, ...) pour les algèbres géométriques contrairement aux quaternions ... Enfin nous avons montré que la transformée de Fourier quaternionique analyse la couleur avec une direction indiquée par un vecteur couleur, tandis que la transformée de Fourier définie au moyen de l'algèbre \mathcal{G}_3 , plus générique, répartit l'information couleur sur des composantes fréquentielles indépendantes. L'utilisation de modèles algébriques pour représenter l'information couleur permet la définition et le développement d'un filtre spatial de détection de contours tenant compte de la dispersion dans l'espace couleur.

Quaternions and Geometric Algebras, new tools for digital colour images

Abstract The main subject of this PhD thesis is colour image processing. The first methods dealing with these images consisted in applying existing greyscale processing algorithms on each of the three colour components. Colour processing has improved using perceptual colour spaces but also by considering colours as vectors. In this work, we follow the idea of colour modelization and we propose to encode their vectorial information into mathematical models in order to manipulate them globally and geometrically. Three formalisms are presented to cope with colour : complex numbers, quaternions and geometric algebras (also called Clifford algebras). New colour tools are proposed to analyse the digital spectrum embedded in each of these formalisms and the definition of Fourier transforms. We give the main advantages and drawbacks of each model, namely : impossibility for the complex numbers to represent whole colour vectors that needs at least three components to be described properly ; distinction between objects and operations on objects (projections, rotations, ...) with geometric algebras whereas it is not possible with quaternions. We then showed that the quaternionic Fourier transform analyse colours with a direction whereas the Clifford \mathcal{G}_3 Fourier transform has not got any direction to analyse the colour so it treats every colour channel independently. Eventually one of the main applications is the definition of a spatial colour edge detector filter using these formalisms.

Discipline : traitement du signal et des images.

Mots clés : Analyse d'images, espace numérique couleur, quaternions, algèbres géométriques, transformations de Fourier, filtrage spatial et fréquentiel.

Patrice Denis - Laboratoire Signal Image Communication

Bât. SP2MI - Téléport 2, Bd Marie et Pierre Curie - BP 30179 - 86962 Futuroscope Cedex